

МАТЕМАТИКА

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

**ПРИМЕР ОДНОМЕРНОГО КОНТИНУУМА, НУЛЬМЕРНО И ОТКРЫТО
ОТОБРАЖАЮЩЕГОСЯ НА КВАДРАТ**

(Представлено академиком П. С. Александровым 22 IV 1954)

1. П. С. Александровым был поставлен вопрос о возможности повышения размерности при открытом отображении. А. Н. Колмогоров построил одномерный континуум, нульмерно* и открыто отображающийся на двумерный ⁽¹⁾. Я. М. Каждном ⁽²⁾ был построен пример одномерного континуума, открыто отображающегося на квадрат, затем Андерсоном ⁽³⁾ — пример одномерного континуума, открыто отображающегося на куб произвольной размерности. Андерсон ⁽⁴⁾ построил пример плоского одномерного континуума, открыто и монотонно отображающегося на квадрат. Однако во всех примерах, кроме ⁽¹⁾, отображение не является нульмерным. Известно, что плоский одномерный континуум невозможно открыто и нульмерно отобразить на квадрат.

Оставался открытым вопрос о существовании одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на квадрат. Мы здесь строим пример такого континуума.

Мы строим сначала в пространстве XYZ двумерный континуум Z , проектирование которого в плоскость XY есть нульмерное открытое отображение на квадрат C . Затем строим сходящуюся последовательность двумерных континуумов $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ в пространстве XYZ так, что проекция X_n в пространстве XYZ есть континуум Z , а проектирование X_n на квадрат C есть нульмерное открытое отображение.

Топологический предел X континуумов X_n есть искомый одномерный континуум, а проектирование его на квадрат C — нульмерное открытое отображение.

2. Континуум Z мы получим как предел сходящейся последовательности континуумов Z_n . Для построения Z_n рассмотрим поверхность, заданную уравнением $z = \varphi_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, определенную на квадрате C и являющуюся суммой боковых граней равнобоких пирамид с высотой $\frac{1}{4^n}$, основаниями которых являются квадраты, полученные от деления C на 4^n равных квадратов. Континуум Z_n есть сумма 2^n различных поверхностей K_i^n , $i = 1, 2, \dots, 2^n$, и поверхность K_i^n задана уравнением:

$$z = \sum_{r=1}^n a_{ir}^{(n)} \varphi_r(x); \quad a_{ir}^{(n)} = 0, 1.$$

* Отображение называется нульмерным, если прообраз каждой точки нульмерен.

Легко показать, что проектирование на квадрат C континуума Z , который является топологическим пределом последовательности $Z_1, Z_2, Z_n, \dots$, есть нульмерное открытое отображение.

Заметим, что континуум Z для любого n есть сумма 2^n слоев $R_{a_1 \dots a_n}$. Слой $R_{a_1 \dots a_n}$ содержит все поверхности K_i^{n+p} , $p \geq 0$, для которых первые n коэффициентов $a_{i_r}^{n+p}$ равны, соответственно, $a_1, \dots, a_n$. Проекция в C пересечения двух слоев $R_{a_1 \dots a_{r-1} 0}$ и $R_{a_1 \dots a_{r-1} 1}$ есть сумма всех отрезков, делящих C на 4^r равных квадратов.

3. Для построения континуума X мы разобьем сначала Z на сумму двух кусков S_1 и S_2 . Пусть A и B — середины двух противоположных сторон ad и bc квадрата C . Выберем точки $A' \in Ad$ и $B' \in bB$ так, что длина $AA' =$ длине $B'B = 1/8$. Кусок S_1 проектируется на трапецию $abBA'$, а кусок S_2 — на трапецию $AB'cd$. Мы опишем построение части $\sigma^{(1)}$ куска S_1 , проектирующейся на треугольник ABA' . Эта часть будет построена как замыкание суммы счетного множества кусков $\sigma_{n_1 \dots n_k}^{(1)}$ континуума Z :

$$\sigma^{(1)} = \sigma_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 \dots n_k} \sigma_{n_1 \dots n_k}^{(1)}.$$

Пусть построена часть куска $\sigma_0^{(1)}$, проектирующаяся в многоугольник, который получается из треугольника ABA' выбрасыванием конечного числа прямоугольных треугольников, подобных ABA' , с гипотенузами, лежащими на $A'B$ и в сумме покрывающими $A'B$.

Пусть EFG такой треугольник (или ABA'), $FG \subset A'B$ и его катеты входят в проекцию пересечения слоев $R_{a_1 \dots a_r 0}$ и $R_{a_1 \dots a_r 1}$, $r \geq 0$. Часть слоя $R_{a_1 \dots a_r 0}$, проектирующаяся в некоторый прямоугольник, на стороне которого лежит EG (EG параллельно AB), принадлежит $\sigma_0^{(1)}$ (или $EG \subset AB$). Отрезок EG разделим на 2^p равных частей так, чтобы перпендикуляры d_i , проведенные из нечетных точек деления до пересечения с $A'B$, не принадлежали к проекции $R_{a_1 \dots a_r 0} \cdot R_{a_1 \dots a_r 1}$, а перпендикуляры из четных точек — принадлежали. Строим в EFG 2^{p-1} прямоугольников, у которых одна сторона есть часть EG , отсеченная нечетными точками деления, и одна сторона — отрезок d_i . Для каждого нечетного прямоугольника Δ присоединим к $\sigma_0^{(1)}$ проектирующуюся в него часть слоя $R_{a_1 \dots a_r 0 \dots 00}$ наименьшего ранга, проекция пересечения которого со слоем $R_{a_1 \dots a_r 0 \dots 01}$ того же ранга содержит периметр Δ . Аналогично, для четных прямоугольников Δ присоединяем к $\sigma_0^{(1)}$ проектирующуюся в Δ часть слоя $R_{a_1 \dots a_r 1 0 \dots 0}$. Части $\sigma_0^{(1)}$, проектирующиеся в два соседних прямоугольника, пересекаются в конечном числе точек, не лежащих на $A'B$.

$\sigma_0^{(1)}$ есть замыкание суммы всех построенных так кусков. Проекция $\sigma_0^{(1)}$ есть треугольник ABA' .

Для каждого треугольника EFG и каждого отрезка d_i строим два равных прямоугольных треугольника первого ранга HJK и HLK ; HK есть d_i , другой катет лежит на EG и $\frac{\text{дл. } HJ}{\text{дл. } HK} = \frac{1}{8}$; HK есть проекция линии разреза $\sigma_0^{(1)}$, так что в HJK проектируется только часть $\sigma_0^{(1)}$, лежащая в слое $R_{a_1 \dots a_r 0}$, а в HLK — часть $\sigma_0^{(1)}$, лежащая в слое $R_{a_1 \dots a_r 1}$. В каждую точку HK проектируются одна (для конечного числа точек HK) или две точки $\sigma_0^{(1)}$. Над HJK строим кусок $\sigma_{n_1}^{(1)}$ в слое

* Куском континуума мы называем замыкание открытого в нем множества.

$R_{a_1 \dots a_{r-1} 0 \dots 0}$ так же, как $\sigma_0^{(1)}$ построен над ABA' . Аналогично строим $\sigma_{m_1}^{(1)}$ над HLK в слое $R_{a_1 \dots a_r 0 \dots 0}$. Очевидно, что $\sigma_{n_1}^{(1)}$ пересекается с $\sigma_0^{(1)}$ вдоль линии, проектирующейся в HK .

Далее, над счетным множеством треугольников второго ранга, содержащихся в каждом HJK (и HLK), таким же образом строим куски $\sigma_{n_1 n_2}^{(1)}$, пересекающиеся с $\sigma_{n_1}^{(1)}$, и т. д.

Построив $\sigma^{(1)}$, мы таким же образом строим кусок $\sigma^{(2)}$, проектирующийся на треугольник $AB'B$. Затем, обозначив через Z' и Z'' части Z , пересекающиеся вдоль AB , проекции которых прямоугольники $abBA$ и $ABcd$, мы полагаем:

$$S_1 = Z' + \sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}; \quad S_2 = Z'' + \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}.$$

По построению треугольники $\Delta_{n_1 \dots n_k}^{(1)}$, являющиеся проекциями кусков $\sigma_{n_1 \dots n_k}^{(1)}$ одного ранга k , либо не пересекаются, либо пересекаются вдоль общего катета d_i . Аналогично для $\Delta_{n_1 \dots n_k}^{(2)}$. Перенумеровав подряд гипотенузы l_n всевозможных треугольников $\Delta_{n_1 \dots n_k}^{(i)}$, $i = 1, 2$, всевозможных рангов k , полагаем

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} l_n.$$

Обозначаем через $\mathcal{G}$ замкнутое множество, состоящее из всех точек пересечения $S_1 \cdot S_2$, проекции которых принадлежат к E . Мы показываем, что

$$\dim \mathcal{G} = 0.$$

Определяем на S_2 непрерывную функцию $t = \psi(M)$ так, что

$$\psi(M) = 0, \quad M \in \mathcal{G}; \quad 0 < \psi(M) \leq 1/2, \quad M \in S_2 - \mathcal{G}.$$

Затем обозначаем через $S_2^{(1)}$ лежащую в пространстве $XYZT$ поверхность, определенную этой функцией. Тогда

$$X_1 = S_1 + S_2^{(1)}; \quad \dim S_1 \cdot S_2^{(1)} = 0.$$

Проекция X_1 в плоскость XY есть квадрат C . Непрерывное отображение f_1 , осуществляющее проектирование X_1 на C , есть нульмерное открытое отображение.

Континуумы X_k строятся по индукции. Пусть построен X_k так, что

$$X_k = \sum_{n_1 \dots n_k} S_{n_1 \dots n_k}^{(k)}; \quad \dim S_{n_1 \dots n_k}^{(k)} \cdot S_{m_1 \dots m_k}^{(k)} \leq 0,$$

проекция $S_{n_1 \dots n_k}^{(k)}$ в Z есть кусок $S_{n_1 \dots n_k}$, а в C — многоугольник $\pi_{n_1 \dots n_k}$ диаметра $< \frac{1}{2^{k-1}}$. Проекция X_k в плоскость XY есть квадрат C и

проектирование f_k есть нульмерное открытое отображение. Для построения X_{k+1} мы разбиваем сначала каждый $\pi_{n_1 \dots n_k}$ при помощи ломаных на два многоугольника $\pi_{n_1 \dots n_{k+1}}$ и $\pi_{n_1 \dots n_{k+2}}$. Затем при помощи построения, аналогичного сделанному выше, с некоторыми техническими усложнениями, разбиваем $S_{n_1 \dots n_k}$ на сумму конечного числа кусков $S_{n_1 \dots n_{k+1}}$, пересекающихся не более чем по два, каждый из которых проектируется на какой-нибудь $\pi_{n_1 \dots n_{k+1}}$, $j = 1, 2$. Куски $S_{n_1 \dots n_{k+1}}$, проек-

тирующиеся на один и тот же $\pi_{n_1 \dots n_k r}$, между собой не пересекаются. В пересечении $S_{n_1 \dots n_k i} \cdot S_{n_1 \dots n_k j}$, $i \neq j$, выделяем нульмерное замкнутое множество $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{(ij)}$, аналогичное $\mathcal{G}$, и полагаем:

$$\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} = \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k} \cdot S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} + \sum_{i \neq n_{k+1}} \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}^{(n_{k+1} i)}.$$

На каждом куске $S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$ мы задаем непрерывную функцию $\psi_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$1) \psi_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}(M) = 0, \text{ если } M \in \mathcal{G}_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} + \sum_{j > n_{k+1}} S_{n_1 \dots n_k j} \cdot S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} = P_{n_1 \dots n_k};$$

$$2) 0 \leq \psi_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}(M) < 1/2 \psi_{n_1 \dots n_k r j}(M) - \psi_{n_1 \dots n_k r n_{k+1}}(M) - \dots - \psi_{n_1 \dots n_k}(M),$$

если $M \in S_{n_1 \dots n_k r j} \cdot S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, $r < k$, $j > n_{r+1}$;

$$3) 0 < \psi_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}(M) \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ если } M \in S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} - P_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}.$$

Тогда $S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}^{(k+1)}$ есть поверхность, определенная на $S_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}$, при помощи функции

$$t = \psi_{n_1} + \psi_{n_1 n_2} + \dots + \psi_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}.$$

Последовательность континуумов X_k равномерно сходится к локально-связному континууму X . Легко видеть, что для любого k имеем:

$$X = \sum_{n_1 \dots n_k} \tilde{S}_{n_1 \dots n_k},$$

где $\tilde{S}_{n_1 \dots n_k}$ проектируется в Z на $S_{n_1 \dots n_k}$ и граница $\tilde{S}_{n_1 \dots n_k}$ в X есть нульмерное множество, гомеоморфное $\mathcal{G}_{n_1 \dots n_k}$. Диаметры кусков $\tilde{S}_{n_1 \dots n_k}$ стремятся к нулю с возрастанием k , следовательно,

$$\dim X = 1.$$

Проекция локально-связного одномерного континуума X в плоскость XU есть квадрат S и отображение f , осуществляющее проектирование, есть нульмерное открытое отображение.

Нульмерность f устанавливается на основании 2). Открытость легко следует из того, что все отображения f_k открыты.

Поступило
8 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Н. Колмогоров, Ann. of Math., 38, No. 1 (1937). ² Я. М. Каждан, ДАН, 56, № 4 (1947). ³ Anderson, Duke Math. J., 19 (1952). ⁴ Anderson, Trans. Am. Math. Soc., 73 (1952).