

И. Н. ВРУБЛЕВСКАЯ

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ И ПОЛУТРАЕКТОРИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 III 1954)

В настоящей заметке пользуемся терминологией статьи ⁽¹⁾ *. R — метрическое пространство, в котором задана динамическая система $f(p, t)$.

1. Особую точку O называем положительно (отрицательно) асимптотически устойчивой, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям: 1) для любых $p \in Q(O, \delta)$ и $\sigma > 0$ найдется такое $t_p > 0$ (соответственно $t_p < 0$), что $f(p, t_p) \in Q(O, \sigma)$; 2) $f(Q(O, \delta); 0, +\infty) \subset Q(O, \varepsilon)$ (соответственно $f(Q(O, \delta); -\infty, 0) \subset Q(O, \varepsilon)$).

Область притяжения положительно (отрицательно) асимптотически устойчивой точки O есть совокупность всех точек $p \in R - \{O\}$, удовлетворяющих условию: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_p > 0$ (соответственно $t_p < 0$), что $f(p; t_p, +\infty) \subset Q(O, \varepsilon)$ (соответственно $f(p; -\infty, t_p) \subset Q(O, \varepsilon)$).

Множество линейно связно, если для любых его точек p и q существует непрерывное отображение сегмента $[0, 1]$ и множество такое, что числам 0 и 1 соответствуют точки p и q .

Теорема 1. Пусть O — положительно (отрицательно) асимптотически устойчивая особая точка. Если область притяжения точки O линейно связна, то любые две положительные (отрицательные) полутраектории, содержащиеся в этой области, кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

2. Определению асимптотической устойчивости особой точки можно придать другой вид.

Будем говорить, что особая точка O удовлетворяет условию Γ^+ (условию Γ^-), если существует такое $d > 0$, что для любой точки $p \in Q(O, d) - \{O\}$: 1) O есть единственная ω -предельная (α -предельная) точка траектории $f(p; -\infty, +\infty)$; 2) найдется такое $t_p < 0$ (соответственно $t_p > 0$), что $f(p, t_p) \notin Q(O, d)$.

Будем говорить, что особая точка O удовлетворяет условию Π^+ (условию Π^-), если существует такое $d > 0$, что для любой точки $p \in Q(O, d) - \{O\}$: 1) O есть единственная ω -предельная (α -предельная) точка траектории $f(p; -\infty, +\infty)$; 2) найдется такое $t_p < 0$ (соответственно $t_p > 0$), что $f(p; -\infty, t_p) \cap Q(O, d) = \emptyset$ (соответственно $f(p; t_p, +\infty) \cap Q(O, d) = \emptyset$).

Лемма. Пусть пространство R локально компактно и O — особая точка динамической системы $f(p, t)$.

* Настоящая заметка и заметка ⁽¹⁾ содержат изложение результатов, полученных под руководством Н. А. Шанина.

Тогда следующие утверждения равносильны;

А. O положительно (отрицательно) асимптотически устойчива.

В. O удовлетворяет условию I^+ (условию I^-).

С. O удовлетворяет условию II^+ (условию II^-).

Отсюда следует

Теорема 2. Пусть пространство R локально компактно и O — особая точка, удовлетворяющая условию I^+ или условию II^+ (условию I^- или условию II^-). Если область притяжения точки O линейно связна, то любые две положительные (отрицательные) полутраектории, содержащиеся в этой области, кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

Теорема 3. Пусть O — особая точка динамической системы, заданной в евклидовом пространстве E^n при $n > 1$, и пусть O удовлетворяет условию I^+ или условию II^+ (условию I^- или условию II^-). Тогда любые две положительные (отрицательные) полутраектории, имеющие O своей предельной точкой, кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

3. Пусть пространство R есть плоскость. Пусть O — особая точка; l_0 и l_1 — две траектории, имеющие точку O своей единственной ω -предельной (α -предельной) точкой.

Будем говорить, что простая дуга H положительно (отрицательно) сопрягает траектории l_0 и l_1 , имеющие точку O своей единственной ω -предельной (α -предельной) точкой, если: а) концы p_0, p_1 дуги H принадлежат: p_0 — траектории l_0 , p_1 — траектории l_1 ; б) H не имеет других общих с l_0 и l_1 точек и не содержит точки O ; с) для любой точки $p \in G \cup H$, где G означает область, ограниченную простой замкнутой линией $f(p_0; 0, +\infty) \cup f(p_1; 0, +\infty) \cup H \cup \{O\}$ (соответственно $f(p_0; -\infty, 0) \cup f(p_1, -\infty, 0) \cup H \cup \{O\}$), выполняются условия: 1) траектория $f(p; -\infty, +\infty)$ имеет точку O своей единственной ω -предельной (α -предельной) точкой; 2) найдется $t_p < 0$ ($t_p > 0$), для которого $f(p, t) \notin G$.

Теорема 4. Пусть в плоской динамической системе для траекторий l_0 и l_1 с общей единственной ω -предельной (α -предельной) точкой существует положительно (отрицательно) сопрягающая их простая дуга. Тогда любые положительные (отрицательные) полутраектории траекторий l_0 и l_1 кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

4. Пусть на плоскости R динамическая система $f(p, t)$ определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y),$$

где X и Y непрерывны и удовлетворяют условиям, обеспечивающим единственность решения при любых начальных данных.

Множество L назовем элементарным инвариантным множеством, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) L состоит из конечного числа $m_1 \geq 0$ особых точек $O_1, O_2, \dots, O_{m_1}$ и конечного числа $m_2 \geq 1$ обыкновенных траекторий $L_1, L_2, \dots, L_{m_2}$; 2) если $m_1 = 0$, то $m_2 = 1$ и L есть цикл; 3) если $m_1 \neq 0$, то траектория L_k ($k = 1, \dots, m_2$) имеет единственной ω -предельной точкой одну из точек O_i ($i = 1, \dots, m_1$) и единственной α -предельной точкой одну из точек O_j ($j = 1, \dots, m_1$).

Пусть элементарное инвариантное множество L является ω -предельным (α -предельным) множеством для траектории l и $l \cap L = \emptyset$. Тогда траектория l содержится в связной области $\mathfrak{G}(l)$, границей которой является L .

Теорема 5. Пусть в плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, элементарное инва-

риантное множество L является ω -предельным (α -предельным) множеством для двух различных траекторий l_0 и l_1 . Пусть существует отрезок без контакта $p_0 p_1$ такой, что $p_0 \in l_0$, $p_1 \in l_1$ и $p_0 p_1$ не имеет других общих с l_0 и l_1 точек. Пусть G — область, ограниченная множеством $p_0 p_1 \cup f(p_0; 0, +\infty) \cup f(p_1; 0, +\infty) \cup L$ (соответственно множеством $p_0 p_1 \cup f(p_0; -\infty, 0) \cup f(p_1; -\infty, 0) \cup L$), и выполняется какое-нибудь из следующих (равносильных) условий: 1) любая траектория, проходящая через какую-нибудь точку множества $G \cup p_0 p_1$, имеет L своим ω -предельным (α -предельным) множеством; 2) область G не содержит особых точек.

Тогда любые положительные (отрицательные) полутраектории траекторий l_0 и l_1 геометрически эквивалентны.

Отсюда следует

Теорема 6. Пусть в плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, элементарное инвариантное множество L является ω -предельным (α -предельным) множеством для не содержащейся в L траектории l . Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что выполняется какое-нибудь из следующих условий: 1) любая траектория, проходящая через какую-нибудь точку множества $Q(L, \varepsilon) \cap \mathfrak{G}(l)$, имеет L своим ω -предельным (α -предельным) множеством; 2) множество $Q(L, \varepsilon) \cap \mathfrak{G}(l)$ не содержит особых точек.

Тогда любые положительные (отрицательные) полутраектории, начинающиеся в $\mathfrak{G}(l)$ и имеющие L своим предельным множеством, геометрически эквивалентны.

5. Пусть R есть плоскость и O_1, O_2 — две особые точки динамической системы. Будем говорить, что две траектории l_0, l_1 удовлетворяют условию (А), если l_0 и l_1 имеют точку O_1 своей единственной α -предельной точкой, точку O_2 своей единственной ω -предельной точкой и в области, ограниченной множеством $l_0 \cup l_1 \cup \{O_1, O_2\}$ нет особых точек и нет траекторий, имеющих одну и ту же точку (O_1 или O_2) своей ω -предельной и одновременно α -предельной точкой.

Теорема 7. В плоской динамической системе любые две траектории, удовлетворяющие условию (А), кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

6. Пусть на плоскости R динамическая система задана посредством системы дифференциальных уравнений. Пусть L — элементарное инвариантное множество и O — не принадлежащая L особая точка. Будем говорить, что две траектории l_0, l_1 удовлетворяют условию (В), если l_0 и l_1 имеют множество L своим α -предельным (ω -предельным) множеством, точку O своей единственной ω -предельной (α -предельной) точкой и в области, ограниченной множеством $l_0 \cup l_1 \cup LU\{O\}$, нет особых точек и нет траекторий, имеющих точку O своей α -предельной (ω -предельной) точкой.

Теорема 8. В плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, любые две траектории, удовлетворяющие условию (В), геометрически эквивалентны.

Пусть L_1 и L_2 — два элементарных инвариантных множества. Будем говорить, что две траектории l_0, l_1 удовлетворяют условию (С), если l_0 и l_1 имеют множество L_1 своим α -предельным множеством, множество L_2 своим ω -предельным множеством и в области, ограниченной множеством $l_0 \cup l_1 \cup L_1 \cup L_2$, нет особых точек.

Теорема 9. В плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, любые две траектории, удовлетворяющие условию (С), геометрически эквивалентны.

7. На основании полученных результатов для грубой динамической системы на плоскости ⁽²⁾ выясняется связь между гео-

метрическими ячейками и ячейками в смысле Андронова и Понтрягина.

Теорема 10. *В грубой динамической системе на плоскости:*
а) *любая ячейка в смысле Андронова и Понтрягина есть геометрическая ячейка и любая особая траектория есть геометрическая ячейка;* б) *всякая геометрическая ячейка есть либо ячейка в смысле Андронова и Понтрягина, либо особая траектория.*

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
19 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Н. Врублевская, ДАН, **97**, № 1 (1954). ² А. Андронов, Л. Понтрягин, ДАН, **14**, № 5 (1937).