

М. И. ВИШИК

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IV 1954)

1. Смешанная задача для систем с сильно эллиптической пространственной частью. Пусть в цилиндрической области $Q = D \times (0 < t < l)$, где D — ограниченная область в R^n с границей Γ , дана система дифференциальных уравнений вида

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{(l,j)}^n \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} (A_1^{(l,j)}(x, t) + iA_2^{(l,j)}(x, t)) \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} + Vu = h(x, t), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$; $u = (u_1, \dots, u_N)$ — вектор-функция; $A_s^{(l,j)}(x, t) = \|a_{kr}^{(l,j)}\|$, $s = 1, 2$ ($k, r = 1, \dots, N$), — эрмитовы матрицы; V — любой дифференциальный оператор порядка $< 2m$. Допустим, что пространственная часть (1) $A(t) = A_1(t) + iA_2(t) + V(t)$ удовлетворяет условию сильной эллиптичности ⁽¹⁾ равномерно относительно точки $(x, t) \in Q$ *. Очевидно, что такие системы (1) являются параболическими в смысле И. Г. Петровского ⁽²⁾. Через $\Omega_{A(t)}$ обозначим область определения оператора $A(t)$ при заданном t , соответствующую нулевым граничным условиям ⁽¹⁾ (т. е. для $u \in \Omega_{A(t)}$ $u|_{\Gamma} = \dots = u_{x_{i_1} \dots x_{i_{m-1}}}^{\langle m-1 \rangle}|_{\Gamma} = 0$) **.

Как показано в ^(3,4), оператор $A(t)$ на $\Omega_{A(t)}$ полуограничен: $\operatorname{Re} (A(t)u, u) \geq c^2(u, u)_{W_2^{(m)}} + \alpha(u, u)$, $c^2 > 0$, где $(,)$ — обычное скалярное произведение, а $(,)_{W_2^{(m)}}$ — метрика в пространстве $W_2^{(m)}(0)$ ⁽⁵⁾. Очевидно, при исследовании систем (1) можно считать $\alpha > 0$, в противном случае этого можно добиться, сделав в (1) замену $u = \bar{u} \exp(\alpha + 1)t$.

Для уравнения (1) ставится смешанная краевая задача (I): найти решение u системы (1), удовлетворяющее на $B = \Gamma \times (0 < t < l)$ нулевым граничным условиям и при $t = 0$ начальному условию $u|_{t=0} = \varphi(x)$.

Существование и единственность решения этой задачи в случае коэффициентов, не зависящих от t , доказано В. Э. Лянце.

Разложим весь оператор $A(t)$ на вещественную и мнимую части: $A(t) = C_1(t) + iC_2(t)$, и введем обозначения:

$$\{Gu, Gu\} = \int_0^l (C_1(t)u, u) dt, \quad [u, u] = \int_0^l (u, u) dt, \quad (2)$$

где $Gu = (u_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^{(m)})$ — градиент порядка m функции $u \in \Omega_{A(t)}$ при всех t . Замыкание оператора G будем обозначать той же буквой G , а пространство элементов Gu ($u \in \Omega_G$) с произведением $\{, \}$, — через R^m .

* В случае вещественного уравнения вместо iA_2 стоит кососимметрический оператор.

** Другого типа граничные условия рассмотрены в п. 4.

Под решением (обобщенным) задачи (I) будем понимать такую функцию $u \in \Omega_G$, что для любой функции вида $v = \int_T^t w(x, \tau) d\tau$ для $t < T$ и $v \equiv 0$ для $T \leq t \leq l$ выполнено интегральное тождество:

$$-\left[u, \frac{\partial v}{\partial t}\right] + \{Gu, (E - i\tilde{C}_2)Gv\} = [h, v] + (\varphi, v(x, 0)), \text{ где } \tilde{C}_2 = G^{*-1}C_2G^{-1} \quad (3)$$

(^{1,2}). Многообразие указанных функций v обозначим через Ω^* .

Теорема 1. Если коэффициенты в левой части (1) ограничены и имеют ограниченные по t производные в Q , то задача (I) имеет, и притом единственное, решение для любой правой части $h(x, t) \in L_{p,2}(Q)$ (где метрика в $L_{p,2}(Q)$ задается интегралом по t от квадрата нормы $h(x, t)$ в $L_p(D)$, взятой по x ; $p = \max(1, 2n/(n+2m))$ *) и любой $\varphi(x) \in L_2(D)$. При этом в случае конечного l $\|Gu\| \leq C(\|h\|_{L_{p,2}} + \|\varphi\|_{L_2})$.

Если $h(x, t)$ имеет производную по t , $h'_t \in L_{p,2}(Q)$, а $\varphi(x) \in \Omega_{A(0)}$, то решение $u(x, t)$ задачи (I) имеет обобщенную производную по t , причем $\|Gu'_t\|_{R^m} < +\infty$ (и, значит, $\|u'_t\|_{L_{q,2}} < +\infty$, где q выбрано в соответствии с теоремой вложения С. Л. Соболева (⁵)). При $t \rightarrow 0$ $u(x, t) \rightarrow \varphi(x)$ и $Gu(x, t) \rightarrow G\varphi(x)$.

В случае самосопряженного оператора $A(t)$ (а также в ряде других случаев) уже условие $\varphi(x) \in \Omega_{G(0)}$ обеспечивает $\|u'_t\|_{L_2(Q)} < +\infty$.

Для доказательства единственности полагаем в (3) $v = \int_T^t dt_1 \int_0^{t_1} u(x, \tau) d\tau$ для $t < T$ и $v \equiv 0$ для $T \leq t \leq l$. Далее во втором члене (3) одно интегрирование по t перебрасываем на функцию u . Наконец, выделяем вещественную часть всего соотношения и выводим, что для достаточно малого T $u \equiv 0$ (см. по этому поводу (⁶), стр. 129—139). Значит, единственность решения установлена. Для доказательства существования решения заметим, что для $v \in \Omega^*$

$$\operatorname{Re}\left(-\left[v, \frac{\partial v}{\partial t}\right] + \{Gv, (E - i\tilde{C}_2)Gv\}\right) \geq \frac{1}{2}(v(x, 0), v(x, 0)) + \{Gv, Gv\}. \quad (4)$$

Через $R_2^{(m)}$ обозначим замыкание многообразия $\tilde{R}_2^{(m)}$ пар $(Gv; v(x, 0))$ ($Gv \in R^m$, $v \in \Omega^*$) с метрикой, равной правой части (4). Для любого $v \in \Omega^*$ левая часть (3) является непрерывным функционалом относительно $Gu \in R^m$ и, следовательно, по теореме Рисса, может быть реализована в виде билинейной формы некоторого оператора B с $\Omega_B = \tilde{R}_2^{(m)}$ и областью изменения в R^m :

$$\{Gu, B(Gv; v(x, 0))\} = [h, v] + (\varphi, v(x, 0)). \quad (5)$$

Оператор B в силу (4) имеет ограниченный обратный и, согласно доказанной единственности, всюду плотную область изменения в R^m . Отсюда следует, что сопряженный с ним оператор B^* существует и имеет ограниченный обратный, заданный на всем $R_2^{(m)}$. Пусть W — оператор, переводящий $(Gv; v(x, 0))$ в пару $(v(x, t); v(x, 0))$ с метрикой пространства $(L_{q,2}(Q); L_2(D))$, где $q = 2n/(n-2m)$ для $n > 2m$, q — любое число > 1 для $n = 2m$ и для $n < 2m$ метрика в $L_{q,2}$ определяется интегралом по t от максимума функции $u(x, t)$ по x . Оператор W , по теореме вложения С. Л. Соболева (⁵), ограничен и, сле-

* Для $n = m/2$ следует взять $p = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

довательно, существует сопряженный с ним оператор W^* , заданный на всех парах вида $(h(x, t); \varphi(x))$, где $h \in L_{p,2}(Q)$, $\varphi \in L_2(D)$. Из (5) выведем, что решение задачи дается формулой $u = G^{-1}B^*W^*(h(x, t); \varphi(x))$. Утверждения, касающиеся дифференцируемости по t , см. ниже.

2. Предел решения при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть цилиндр Q неограничен ($l = \infty$) и, кроме сформулированных в теореме 1 ограничений на коэффициенты (1), $\lim_{t \rightarrow \infty} h(x, t) = h(x, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} A^{(l,j)}(x, t) = A^{(l,j)}(x, \infty)$, $\|h(x, t) - h(x, \infty)\|_{L_{p,2}(Q)} < +\infty$, $\|A^{(l,j)}(x, t) - A^{(l,j)}(x, \infty)\|_{L_2(0 < t < \infty)} < +\infty$, где $|A^{(l,j)}| = \max_x |a_{kr}^{(l,j)}|$. Тогда, обозначив через $w(x)$ решение сильно эллиптической системы $L(\infty)w \equiv A_1(\infty)w + iA_2(\infty)w + V(\infty)w = h(x, \infty)$, имеющей положительно-определенную общую вещественную часть $(c^2 \operatorname{Re} L(\infty)u, u) \geq (u, u)_{W_2^{(m)}(I)}$, получим:

$$y(t) \leq y(t_0) \exp(-\gamma^2(t-t_0) + C \int_{t_0}^t \exp[-\gamma^2(t-\tau)] (\|w\|_{W_2^{(m)}} \max_x |A^{(l,j)}(x, \tau) - A^{(l,j)}(x, \infty)| + \|h(x, \tau) - h(x, \infty)\|_{L_p}^2) d\tau, \quad (6)$$

где $y(t) = ((u(x, t) - w(x)), (u(x, t) - w(x)))$, t_0 — большое число, $t > t_0$.

Из (6) следует, что $u(x, t) \Rightarrow w(x)$ при $t \rightarrow \infty$ (7, 8).

3. Аналог метода Галеркина для приближенного решения смешанных краевых задач (современем). Пусть $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) — такая последовательность функций, что Gu_i образуют полную линейно независимую систему элементов в $W_2^{(m)}(0)$.

Приближенное решение задачи (I) ищем в виде: $\tilde{u}_n = \sum_{i=1}^n c_i(t)u_i$, причем коэффициенты $c_i(t)$ определяем из следующих условий: после подстановки в (1) вместо u функции $\tilde{u}_n$ и скалярного умножения (по x) обеих частей на $u_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) левая и правая части совпадают для всех $0 < t < l$:

$$\sum_{i=1}^n c_i'(t)(u_i, u_k) + \sum_{i=1}^n c_i(t)(A(t)u_i, u_k) = (h(x, t), u_k(x)). \quad (7)$$

Начальные условия $c_i(0) = c_i^{(n)}$ берем такими, чтобы последовательность $\sum_{i=1}^n c_i^{(n)}u_i = \varphi_n(x)$ сходилась в L_2 (даже слабо) к функции $\varphi(x)$ (т. е. к начальному условию задачи (I)).

Теорема 3. Последовательность приближенных решений $\tilde{u}_n(x, t)$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в пространстве R^m к точному решению задачи (I). (Условия на коэффициенты (1) — те же, что и в начале теоремы 1.)

Для доказательства умножаем обе части (7) на $c_k(t)$, суммируем по k от 1 до n и интегрируем по t от 0 до T . В результате простых преобразований убеждаемся в том, что $\{Gu_n, \tilde{Gu}_n\}^{1/2} \leq C(\|h\|_{L_{p,2}(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(D)})$. Следовательно, из $\tilde{Gu}_n$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, сходящуюся, скажем, к $Gu(x, t)$. Далее доказываем, что $Gu(x, t)$ является обобщенным решением задачи (I), т. е. выполнено (3). Пользуясь единственностью решения этой задачи, выводим, что и вся последовательность $\tilde{Gu}_n$ сходится к $Gu(x, t)$.

Если $\varphi \in \Omega_{A(0)}$ и выполнены условия второй части теоремы 1, то, выбрав $u_i \in \Omega_{A(0)}$ и последовательность функций φ_n такой, что $A(0)\varphi_n \rightarrow A(0)\varphi$,

легко убеждаемся, что $\|G(\tilde{u}_n)'_t\|_{R^m} \leq C$. Аналогично убеждаемся в существовании высших производных по t от решения u , если выполнены соответствующие условия на φ и h . Отсюда вытекает справедливость последних утверждений теоремы 1.

4. Операторные уравнения, содержащие первую производную по времени. Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\frac{du(t)}{dt} + (A_1(t) + iA_2(t))u(t) = h(t), \quad (8)$$

где $A(t) = A_1(t) + iA_2(t)$ — оператор в унитарном пространстве H ; $u(t), h(t)$ — функции со значениями в H . Оператор $A_1(t)$ предполагается самосопряженным (для каждого t) и полуограниченным снизу равномерно относительно t ; $A_2(t)$ — симметрический оператор. Без ограничения общности можно считать $c^2(A_1(t)w, w) \geq (w, w)$.

Теорема 4. Пусть: 1) $A_1(t) = D^*(t)D(t)$ (например, $A_1(t) = A_1^{1/2}(t)A_1^{1/2}(t)$), причем оператор $D(t)$ замкнутый, имеет область определения Ω_D , не зависящую от t , и область изменения $D(t)\Omega_D = H_1$, где H_1 — некоторое унитарное пространство; кроме того, $D(t)$ непрерывно зависит от t и $c^2\|D(0)u\|_{H_1} \leq \|D(t)u\|_{H_1} \leq C^2\|D(0)u\|_{H_1}$; оператор D^{-1} ограничен; 2) для всякого $u \in \Omega_D$ и $0 \leq t \leq l$ существует (в сильном смысле) производная по t $(D(t)u)'_t$, причем $\|(Du)'_t\|_{H_1} \leq C\|D(t)u\|_{H_1}$; 3) замыкание оператора $\bar{A}_2(t) = D^{-1}(t)A_2(t)D^{-1}(t)$ является ограниченным и самосопряженным оператором, причем $\|(\bar{A}_2(t)Dw)'_t\|_{H_1} \leq C\|Dw\|_{H_1}$ для $0 \leq t \leq l$. Тогда задача о нахождении решения уравнения (8) (в котором оператор $A(t)$ понимается так: $A(t) = D^*(t)(E + \bar{A}_2)D(t)$) при заданном начальном условии $u|_{t=0} = \varphi \in H$ имеет, и притом единственное, решение для любой правой части $h(t)$ с интегрируемым по t квадратом нормы.

Для приближенного решения начальной задачи для (8) может быть применен аналог метода Галеркина, изложенный в п. 3.

5. Уравнения типа уравнения Шредингера. Рассмотрим уравнения вида (8), в которых A_1 не является главной частью A .

Теорема 5. Пусть оператор $A^*(t)$ (сопряженный с оператором $A(t)$) обладает следующими свойствами: 1) он имеет область определения Ω_{A^*} , не зависящую от t ; 2) вещественная часть оператора $A^*(t)$ полуограничена (равномерно по t): $\operatorname{Re}(A^*(t)z, z) \geq m(z, z)$, $z \in \Omega_{A^*}$; 3) $A^*(t)z$ непрерывно (в H) зависит от t при фиксированном $z \in \Omega_{A^*}$ и для всякого t $(A^*(t) + (-m + 1)E)\Omega_{A^*} = H$. Тогда начальная задача для уравнения (8) (в котором под $A(t)$ подразумевается замыкание прежнего оператора $A(t)$) с начальным условием $u|_{t=0} = \varphi (\in H)$ имеет, и притом единственное, решение для любой правой части с интегрируемым квадратом нормы по t . Начальные условия принимаются в сильном смысле в H ; решение $u(t)$ имеет производную по t в сильном смысле и непрерывно зависит от φ и от интеграла от квадрата нормы $h(t)$.

Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
20 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. И. Вишик, Матем. сборн., 29 (71): 3, (1951). ² И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, 1, в. 7 (1938). ³ L. Gårding, Math. Scand., 1, 55 (1953). ⁴ F. Browder, Proc. Nat. Ac. Sci., 38, № 8 (1952). ⁵ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950. ⁶ О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М.—Л., 1953. ⁷ М. И. Вишик, ДАН, 81, № 5 (1951). ⁸ М. И. Вишик, ДАН, 86, № 4 (1952).