

Е. С. ФРАДКИН

# ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НУКЛОНОВ С МЕЗОНАМИ

(Представлено академиком И. Е. Таммом 14 VII 1954)

В настоящей статье мы дадим краткий вывод системы функциональных уравнений, определяющих  $S$ -матрицу взаимодействия нуклонов с мезонами, и замкнутое решение для  $S$ -матрицы. При этом для простоты рассмотрим случай взаимодействия нуклона с нейтральными псевдоскалярными мезонами посредством псевдоскалярной связи.

Следуя работе <sup>(1)</sup>, рассмотрим систему, гамильтониан которой

$$H = H_0 + H_{вз} + H_{вн}, \quad (1)$$

где  $H_0$  — гамильтониан свободных полей;  $H_{вз}$  — гамильтониан взаимодействия нуклонов с мезонами;  $H_{вн}$  — гамильтониан взаимодействия мезонов и нуклонов с внешними источниками.

Последний имеет вид

$$H_{вн} = - \int \{ \bar{\psi}(xt) \eta(xt) + \bar{\eta}(xt) \psi(xt) + J(xt) \varphi(xt) \} d^3x,$$

где  $\eta$  — источник нуклонов;  $J$  — источник мезонного поля, причем  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  антикоммутируют между собой и со спинорным полем.

В гейзенберговском представлении, где волновая функция системы неизменна во времени, уравнения движения для операторов поля имеют вид

$$(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi(x) - g\gamma_5 \varphi(x) \psi(x) = \eta(x); \quad (2)$$

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu \partial_\mu + m) - g\varphi(x) \bar{\psi}(x) \gamma_5 = \bar{\eta}(x); \quad (3)$$

$$(-\partial_\nu^2 + \mu^2) \varphi(x) - J + j, \quad \text{где } j = \frac{1}{2} g [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi]. \quad (4)$$

Перейдем к новому представлению, в котором операторы поля не зависят от внешних источников, а зависимость волновой функции системы от времени определяется  $H_{вн}$ , т. е. в новом представлении (операторы в этом представлении отличаем знаком  $\sim$ ) имеем

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \tilde{H}_{вн} \Phi(t); \quad (-i\gamma_\mu \partial_\mu + m) \tilde{\psi} - g\gamma_5 \tilde{\varphi} \tilde{\psi} = 0; \quad (-\partial_\nu^2 + \mu^2) \tilde{\varphi} = \tilde{j}. \quad (5)$$

Пусть внешнее взаимодействие адиабатически включено при  $t = -\infty$ , тогда оператор  $S(t, -\infty)$ , переводящий решение уравнения (5) при  $t = -\infty$  в решении при данном  $t$  (т. е.  $\Phi(t) = S(t, \infty) \Phi(-\infty)$ ), определяется уравнением

$$i \frac{\partial S(t, -\infty)}{\partial t} = \tilde{H}_{вн} S(t, -\infty). \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место интегральное соотношение:

$$S(t, t') = 1 - i \int_{t'}^t \tilde{H}_{\text{BH}}(t_2) S(t_2, t') dt_2, \quad (7)$$

где

$$S(t, t_2) = S(t, -\infty) S^{-1}(t_2, -\infty). \quad (8)$$

При помощи (7), действуя методом, аналогичным использованному в работе (2), получим следующие значения для функциональных производных:

$$\text{а) когда } t < \xi_0 \quad \frac{\delta S(t)}{\delta J(\xi)} = \frac{\delta S(t)}{\delta \eta(\xi)} = \frac{\delta S(t)}{\delta \bar{\eta}(\xi)} = 0; \quad (9)$$

$$\text{б) когда } t > \xi_0 \quad \frac{\delta S(t)}{\delta J(\xi)} = i S(t, \xi_0) \bar{\varphi} S(\xi_0) = i S(t) \varphi(\xi); \quad (10)$$

$$\frac{\delta S(t)}{\delta \eta_{\text{спр}}(\xi)} = i S(t) \bar{\psi}(\xi); \quad \frac{\delta S(t)}{\delta \eta_{\text{сл}}(\xi)} = i S(t) \psi(\xi), \quad \text{где } S(t) = S(t, -\infty).$$

При этом мы использовали связь операторов со значком  $\sim$  у гейзенберговских операторов, т. е.  $\tilde{\varphi}(t) = S^{-1}(t, -\infty) \varphi(t)$ ,  $S(t, -\infty)$  и т. д. Знак «спр» или «сл», стоящий у функциональных производных по источникам спинорного поля, означает, что при переходе к интегральному виду для этих соотношений вариация от соответствующих источников должна стоять справа или слева от выражений в правых частях соответствующих формул (например,  $\delta_{\eta} S = i \int \bar{\psi}(\xi) \delta \eta(\xi) d^4 \xi S$ ).

Из (9) — (10) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta_{\text{спр}}(x)} &= i S(\infty) \bar{\psi}(x); & \frac{\delta S(\infty)}{\delta \eta_{\text{сл}}(x)} &= i S(\infty) \psi(x); \\ \frac{\delta S(\infty)}{\delta J(x)} &= i S(\infty) \varphi(x); & \frac{\delta^2 S(\infty)}{\delta \eta(x) \delta \eta(x')} &= -S(\infty) T(\bar{\psi}(x') \psi(x)); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} S(\infty) = (i)^{n+1} S(\infty) T\left(\prod_{i=1}^n \psi(x) \varphi(x_i)\right) \text{ и т. д.,}$$

где  $T(A(x)B(y)) = A(x)B(y)$ , когда  $x_0 > y_0$ ;  $T(A(x)B(y)) = \pm B(y)A(x)$ , когда  $x_0 < y_0$ . Знак минус имеет место лишь в том случае, когда оба оператора  $A(x)$  и  $B(y)$  относятся к нуклонному полю. При этом в точке, где  $x_0 = y_0$ ,  $T$ -произведение определяется как полусумма значений при  $y_0 = x_0 \pm \epsilon$ . Из формул (11) видно, что если найти выражение для ожидания оператора  $S(\infty)$  в состоянии вакуума при  $t = -\infty$  (обозначим его через  $Z$ ), то последовательным функциональным дифференцированием по внешним источникам можно получить всевозможные функции Грина для задачи взаимодействия нуклонов с мезонами.

При помощи (2) — (4) и (11) легко получить следующую систему функциональных уравнений для указанного матричного элемента  $Z$ :

$$\left\{ -i\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m + ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)} \right\} \frac{\delta Z}{\delta \eta(x)} = i\eta(x) Z; \quad (12)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} \left\{ i\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m + ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J(x)} \right\} = i\bar{\eta}(x) Z; \quad (13)$$

$$(-\partial_{\nu}^2 + \mu^2) \frac{\delta Z}{\delta J(x)} = iJ(x) Z + i \text{Sp } g\gamma_5 \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(x)}, \quad (14)$$

где  $Z = (\Phi_0^*(-\infty), S(\infty) \Phi_0(-\infty)) = (\Phi_0^*(+\infty), \Phi_0(-\infty))$ .

При этом должны выполняться следующие условия: а) из унитарности  $S(\infty)$  следует ограниченность  $Z$  при любых внешних источниках; б) из определения  $Z$  следует, что

$$\text{при } \eta = \bar{\eta} = J = 0 \quad Z = 1, \quad \delta Z / \delta \eta = \delta Z / \delta \bar{\eta} = \delta Z / \delta J = 0; \quad (15)$$

в) полюса в функциях Грина уравнений (12) — (14) обходятся по правилам Фейнмана. Удобно в уравнениях (12) — (14) перейти к импульсному представлению, после чего эти уравнения приобретают вид

$$(\hat{p} + m) \frac{\delta Z}{\delta \eta(p)} + \frac{ig}{(2\pi)^4} \gamma_5 \int \frac{\delta^2 Z}{\delta J(p-k) \delta \bar{\eta}(k)} d^4 k = i\eta(p) Z; \quad (16)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta(p)} (\hat{p} + m) + \frac{ig}{(2\pi)^4} \int \frac{\delta^2 Z}{\delta J(k-p) \delta \eta(k)} d^4 k \gamma_5 = i\bar{\eta}(p) Z; \quad (17)$$

$$(k^2 + \mu^2) \frac{\delta Z}{\delta J(-k)} = iJ(k) Z + \frac{ig}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_5 \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta(p) \delta \eta(q)} \delta(p-q-k) d^4 p d^4 q. \quad (18)$$

Для решения системы уравнений (16) — (18) применим метод Гельфанда и Минлоса лишь к мезонному полю, т. е. переходим к решетке в импульсном пространстве и ищем решение для  $Z$  в виде:

$$Z = C \int e^{i \int J(k) a(k) d^4 k} R(\eta, \bar{\eta}, a(k_1) \dots a(k_n) \dots) \prod_k da(k), \quad (19)$$

где  $C$  — постоянная, которая выбирается из условия, что при  $\eta = \bar{\eta} = J = 0 \quad Z = 1$ .

Из (16) — (18) получим систему уравнений для определения  $R$ :

$$\int \left\{ (\hat{p} + m) \delta(p-k) - \frac{g}{(2\pi)^4} \gamma_5 a(p-k) \right\} \frac{\delta R}{\delta \eta(k)} d^4 k = i\eta(p) R; \quad (20)$$

$$\frac{\delta R}{\delta \eta(p)} (\hat{p} + m) - \frac{g}{(2\pi)^4} \int a(k-p) \frac{\delta R}{\delta \eta(k)} \gamma_5 d^4 k = i\bar{\eta}(p) R; \quad (21)$$

$$(k^2 + \mu^2) a(-k) R = -\frac{\delta R}{\delta a(k)} + \frac{ig}{(2\pi)^4} \text{Sp} \int \gamma_5 \frac{\delta^2 R \delta(p-q-k)}{\delta \eta(p) \delta \eta(q)} d^4 p d^4 q. \quad (22)$$

Решение уравнений (20) — (21) можно представить в виде

$$\frac{\delta R}{\delta \eta(p)} = i \int G(p, k, a) \eta(k) d^4 k R; \quad \frac{\delta R}{\delta \eta(p)} = i \int \bar{\eta}(k) G(k, p, a) d^4 k R, \quad (23)$$

где  $G(p, k, a)$  — функция Грина нуклона во внешнем поле  $a$  и удовлетворяет уравнению:

$$(\hat{p} + m) G(p, k, a) - \frac{g}{(2\pi)^4} \gamma_5 \int a(p-k') G(k', k, a) d^4 k' = \delta(p-k). \quad (24)$$

Из (25) следует

$$R = R_1(a) \exp i \int \bar{\eta}(p) G(p, k, a) \eta(k) d^4 p d^4 k, \quad (25)$$

где функционал  $R_1$  зависит лишь от функции  $a$  и не зависит от  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ .

После подстановки (25) в (22) получим для  $R_1$  уравнение

$$(k^2 + \mu^2) a(k) R_1 = -\frac{\delta R_1}{\delta a(k)} - \frac{g}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_5 \int G(p, q, a) \delta(p-q-k) d^4 p d^4 q R_1,$$

откуда следует, что (26)

$$R_1 = \exp \int \left\{ -\frac{1}{2} a(k) (k^2 + \mu^2) a(-k) - \right. \\ \left. - \frac{g}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_5 \int_0^1 d\lambda G(p, q, \lambda a) a(k) \delta(p - q - k) d^4 p d^4 q \right\} d^4 k. \quad (27)$$

Следовательно, согласно (19), (25), (27) для  $Z$  имеем\*

$$\frac{Z}{C} = \exp \left\{ \int \left[ iJ(k) a(k) - \frac{1}{2} a^2(k) (k^2 + \mu^2) + i \int \bar{\eta}(p) G(p, x, a) \eta(k) d^4 p - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{g}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_5 \int_0^1 d\lambda G(p, q, \lambda a) a(k) \delta(p - q - k) d^4 p d^4 q \right] d^4 k \right\} \prod_k da(k), \quad (28)$$

где  $1/C$  равно значению правой части (28) при  $\eta = \bar{\eta} = J = 0$ .

Для того чтобы найти функцию Грина системы  $n$  мезонов и  $m$  нуклонов, достаточно взять от  $Z$   $2n$  функциональных производных по  $J$  и  $m$  функциональных производных по  $\eta$  и  $\bar{\eta}$ .

Например, функция Грина системы мезон — нуклон

$$G_{12}(k_1 k_2 k_3 k_4) = (\Phi_0^*(-\infty) T(\bar{\psi}(k_1) \psi(k_2) \varphi(k_3) \varphi(k_4)) \Phi_0(-\infty)) \quad (29)$$

согласно (11) выражается через  $Z$  формулой

$$G_{12}(k_1 k_2 k_3 k_4) = (-i)^4 \frac{\delta^4 Z}{\delta J(k_4) \delta J(k_3) \delta \bar{\eta}(k_2) \delta \eta(k_1)}. \quad (30)$$

Полученные результаты легко могут быть перенесены на случай любого взаимодействия ферми- и бозе-частиц. Выражение, аналогичное (28), получено Ю. А. Гельфандом при помощи развитого им метода «квазиполей».

В заключение приношу свою глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР И. М. Гельфанду за ценное обсуждение полученных результатов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило  
10 VII 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452 (1951). <sup>2</sup> Utiyamo et al., Progr. Theor. Phys., **8**, 81 (1952). <sup>3</sup> И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН, **97**, № 2 (1954).

\* Заметим, что уравнение (24) может быть решено символически в виде

$$G = \frac{1}{\hat{p} + m + g\gamma_5/(2\pi)^4}, \quad \text{и тогда} \quad \frac{g}{(2\pi)^4} \int_0^1 d\lambda G(\lambda a) a(k) = \ln \left( \hat{p} + m + \frac{g\gamma_5}{(2\pi)^4} a \right), \quad \text{где}$$

$\ln$  необходимо также понимать символически.