

И. И. СОБЕЛЬМАН

О СООТНОШЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ И УДАРНОЙ ТЕОРИЙ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

(Представлено академиком Г. С. Ландсбергом 17 IV 1954)

Одной из основных задач теории уширения линий атомного спектра вследствие столкновений излучающего атома с электронами, ионами и другими атомами является вычисление «интеграла уширения»

$$f_{\omega} \sim \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \int_{-T/2}^{T/2} \exp \{i[\varphi(t) - \omega t]\} dt, \quad (1)$$

определяющего распределение интенсивности в линии

$$I(\omega) d\omega = \overline{f_{\omega} f_{\omega}^*} d\omega; \quad (2)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t \Delta(t') dt'; \quad \Delta(t) — \text{смещение частоты излучения при столкнове-}$$

нии; ω отсчитывается от положения несмещенной частоты ω_0 ; усреднение в (2) проводится по всем возможным типам столкновений*.

Эта задача обычно рассматривается с двух различных точек зрения:

1) Ударная концепция (Лоренц, Ленц, Вейскопф⁽¹⁾). Между двумя столкновениями $\Delta(t) = 0$ и фаза $\varphi(t) = \text{const}$. Полагается, что до тех пор, пока среднее время между двумя столкновениями $\tau_f \gg \tau_s$ (длительности столкновения), вклад участков τ_s с $\Delta(t) \neq 0$ в f_{ω} несущественен, и столкновение сказывается лишь в скачкообразном изменении $\varphi(t)$.

В этом приближении удастся вычисление (1) и (2) провести до конца и получить форму линии**.

2) Статистическая теория (Хольцмарк, Кун, Маргенау⁽⁴⁻⁶⁾). Вычисление (1) обходится вовсе. Полагается, что $I(\omega) d\omega$ пропорционально времени, в течение которого $\Delta(t)$ заключено в интервале $\omega, \omega + d\omega$, что соответствует предположению о квазистатическом изменении частоты в процессе столкновения.

Ниже рассматривается вопрос о соотношении и границах применимости этих двух концепций (этот вопрос неоднократно обсуждался⁽⁷⁻¹¹⁾, однако полной ясности в нем не существует). Рассмотрение проводится для плотностей, при которых еще можно ограничиться учетом лишь парных столкновений.

Покажем сначала, каким образом можно получить статистическое распределение из (1). При пролете возмущающей частицы на

* Вопрос о строгом квантовомеханическом обосновании (1) и выяснение границ применимости квазиклассической трактовки столкновений требует специального рассмотрения и здесь не обсуждается (ср., например, ⁽¹¹⁾).

** Наиболее последовательно это проведено в ^(2, 3). Ср. также ⁽¹¹⁾.

прицельном расстоянии ρ

$$\Delta(t) = C_n \{\rho^2 + v^2(t - t_{0i})^2\}^{-n/2}, \quad (3)$$

v — относительная скорость; C_n и n определяются типом взаимодействия. Моменты наибольшего сближения t_{0i} распределены статистически.

Рассмотрим (1) для больших значений ω . Подынтегральное выражение в (1) сильно осциллирует всюду, кроме точек t_k , где $(d\varphi/dt)_{t_k} = \omega$.

Существенный вклад в f_ω дают лишь малые области $\Delta\tau_k$ вокруг этих точек. Разлагая вблизи t_k $\varphi(t)$ в ряд и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим

$$f_\omega \sim \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \sum_k \exp\{i[\varphi(t_k) - \omega t_k]\} \int_{\Delta\tau_k} \exp\left\{\frac{i}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{t_k}(t - t_k)^2\right\} dt. \quad (4)$$

Распространим пределы интегрирования в (4) от $-\infty$ до ∞ , так как интегрирование вне $\Delta\tau_k$ дает нуль. Предполагая фазы $\alpha_k = \varphi(t_k) - \omega t_k$ независимыми* и учитывая, что $(d^2\varphi/dt^2)_{t_k} = (d\Delta/dt)_{t_k}$, получим:

$$\overline{f_\omega f_\omega^*} d\omega = \frac{1}{T} \sum_k \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_{t_k}^{-1} d\omega. \quad (5)$$

Но $d\tau = \sum_k \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_{t_k}^{-1} d\omega$ есть время, в течение которого $\Delta(t)$ заключено в интервале ω , $\omega + d\omega$, и (5) дает статистическое распределение. Заменим суммирование в (5) интегрированием. Число пролетов через кольцевой элемент $2\pi\rho d\rho$ за время T будет $2\pi\rho d\rho NvT$, где N — плотность возмущающих частиц. Учитывая, что точки t_k дают лишь столкновения с

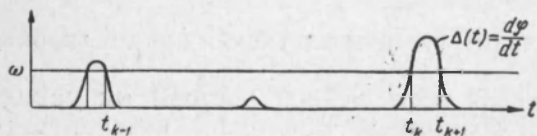


Рис. 1

$\Delta_{\max} \geq \omega$, или, согласно (3), $\rho \leq \rho_\omega = (C_n/\omega)^{1/n}$, получим:

$$I(\omega) d\omega = d\omega \int_0^{\rho_\omega} 4\pi\rho \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^{-1} Nv d\rho = \frac{4\pi N C_n^{3/n}}{n\omega^{1+3/n}} \quad (6)$$

хорошо известное статистическое распределение в крыльях линии (5). При интегрировании в (4) существенна область вокруг t_k , для которой $1/2 \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{t_k} (t - t_k)^2 \leq 1$.

Величина этой области $\Delta\tau_k \approx \sqrt{2} \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^{-1/2}$.

Для справедливости проделанного вывода необходимо, чтобы в пределах этой области можно было пренебречь последующими членами разложения $\varphi(t)$, т. е. должно выполняться $1/6 \left(\frac{d^2\Delta}{dt^2}\right) \Delta\tau^3 \ll 1$ или $\left(\frac{d^2\Delta}{dt^2}\right) \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^{-3/2} \ll 1$. Для столкновения с прицельным расстоянием ρ $\left(\frac{d\Delta}{dt}\right) \approx \frac{C_n v}{\rho^{n+1}}$ и $\left(\frac{d^2\Delta}{dt^2}\right) \approx \frac{C_n v^2}{\rho^{n+2}}$ (если исключить из рассмотрения малые

* Для точек t_k , относящихся к разным столкновениям, это всегда выполняется. Ниже указывается, когда это выполняется также для точек t_k , относящихся к одному столкновению.

окрестности вокруг моментов наибольшего сближения t_{0i}); поэтому

$$\frac{C_n}{v\rho^{n-1}} \gg 1. \quad (7)$$

Нас интересуют столкновения с $\rho \leq \rho_\omega = (C_n/\omega)^{1/n}$, для которых $\Delta_{\max} \gg \omega$. Учитывая это, (7) можно записать в форме

$$\omega \gg \frac{v^{n/(n-1)}}{C_n^{1/(n-1)}} = \Omega. \quad (8)$$

Соотношение (8)* устанавливает границу применимости статистической теории, что согласуется с (8, 9).

Наоборот, для центра линии $\omega \ll \Omega$ справедливо ударное рассмотрение. Действительно, в (1) изменение фазы при столкновении можно считать мгновенным, если $1/\omega$ много больше длительности столкновения:

$$1/\omega \gg \rho/v. \quad (9)$$

Далее, согласно ударной теории, расширение линии связано с столкновениями, при которых полный сдвиг фазы $\beta \approx C_n/v\rho^{n-1} \geq 1$; $\rho \leq \left(\frac{C_n}{v}\right)^{1/(n-1)}$. Подставив в (9), получим $\omega \ll \frac{v^{n/(n-1)}}{C_n^{1/(n-1)}}$.

При оценке ширины линии γ можно пользоваться ударной теорией, если $\gamma_{\text{уд}} \ll \Omega$. В этом случае большая часть интенсивности линии попадает в ударную область, т. е. ударное уширение играет решающую роль. Этот критерий практически совпадает с предложенным ранее в (7). Например, для случая $n=4$, $\gamma_4 = 38,8 C_4^{1/2} v^{1/2} N$ (11) получим $38,8 N C_4/v \ll 1$, что с точностью до числового множителя (в (7) принимается немного отличное выражение для γ_4) совпадает с соотношением (14) в (7).

Можно показать, что $\gamma_{\text{уд}} \ll \Omega$ до тех пор, пока среднее расстояние между частицами $(3/4\pi N)^{1/2}$ много больше $\left(\frac{C_n}{v}\right)^{1/(n-1)}$.

В заключение выражаю благодарность С. Л. Мандельштаму за обсуждение рассмотренного вопроса.

Поступило
20 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Вейскопф, УФН, **13**, 552 (1933). ² E. Lindholm, Arch. f. Mat. Astr. o. Fys., **28B**, No. 3 (1941). ³ P. W. Anderson, Phys. Rev., **76**, 647 (1949). ⁴ J. Holtsmark, Ann. d. Phys., **58**, 577 (1919). ⁵ H. Kuhn, Phil. Mag., **18**, 987 (1934). ⁶ H. Margenau, Phys. Rev., **48**, 755 (1935). ⁷ С. Л. Мандельштам, Н. Н. Соболев, ЖЭТФ, **20**, 323 (1950). ⁸ T. Holstein, Phys. Rev., **79**, 744 (1950). ⁹ A. Jablonski, Phys. Rev., **68**, 78 (1945). ¹⁰ L. Spitzer, ibid., **58**, 348 (1940). ¹¹ А. Унзольд, Сборн. статей Современные проблемы астрофизики и физики Солнца, ИЛ, 1951, стр. 7.

* Можно показать, что (8) достаточно также для выполнения предположения о независимости фаз α_k , сделанного выше.