

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Я. НАТАНЗОН

**ОБ ОДНОМ ИЗМЕНЕНИИ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 1 VI 1954)

Рассмотрим на плоскости комплексного переменного область B , ограниченную контуром C . Пусть на этом контуре заданы напряжения X_n, Y_n в функции дуги s .

Как известно, плоскую задачу теории упругости можно свести к отысканию двух регулярных в B функций $\varphi(z), \psi(z)$, удовлетворяющих краевому условию Н. И. Мусхелишвили:

$$\varphi(\sigma) + \overline{\sigma\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2, \quad (1)$$

где σ — значение z на контуре, а

$$f_1 = -\int_0^s Y_n ds, \quad f_2 = \int_0^s X_n ds. \quad (2)$$

Напряжения определяются по формулам

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)], \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[z\overline{\varphi''(z)} + \psi'(z)]. \quad (3)$$

Преобразуем краевое условие (1). Положим, что контур задан параметрически формулами

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad (4)$$

где x, y — две периодические по ξ функции, причем при изменении ξ от 0 до 2π точка x, y обходит заданный контур в положительном направлении.

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $u = \xi + i\eta$ верхнюю половину бесконечной полосы L (см. рис. 1), ограниченную прямыми $\xi = 0, \xi = 2\pi$ и отрезком действительной оси.

Функции (4) определены на отрезке $\eta = 0, 0 \leq \xi \leq 2\pi$. Допустим, что они могут быть аналитически продолжены на всю верхнюю полуполосу L . Тогда получим две функции $x(u), y(u)$; составим две новые функции:

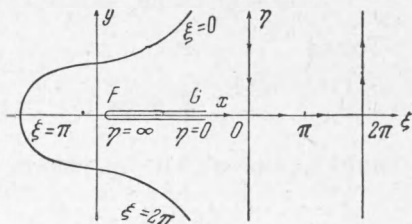


Рис. 1

$$\lambda(u) = x(u) + iy(u), \quad \mu(u) = x(u) - iy(u). \quad (5)$$

Будем предполагать, что функции λ, μ регулярны и $|\lambda'| \neq 0$ всюду на полосе L и ее границе за исключением, может быть, точки $u = \infty$.

Рассмотрим конформное отображение области L при помощи функции $z = \lambda(u)$.

При обходе нижней стороны контура, где $\eta = 0$, точка $z = \lambda(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$ описывает контур C . Пусть точке G этого контура соот-

ветствуют значения $\xi = 0$ и $\bar{\xi} = 2\pi$. Пройдем по боковой стороне контура L , где $\bar{\xi} = 2\pi$, $0 \leq \eta \leq \infty$. Положим, что при $\eta = \infty$ точка z попадает в какую-нибудь точку F области B , а при изменении η от нуля до ∞ точка z проходит по какой-нибудь кривой K от G до F . Наконец, пройдем по стороне контура L : $\xi = 0$, $0 \leq \eta \leq \infty$. В силу периодичности функции (4) z опять опишет кривую K , но в обратном направлении от F к G .

Полному обходу по границе L в положительном направлении соответствует обход по контуру C и разрезу вдоль кривой K , т. е. полуполоса L отображается на область B с разрезом вдоль K .

На части контура L : $\eta = 0$, $0 \leq \xi \leq 2\pi$ будем иметь $\sigma = \lambda(\xi)$, $\bar{\sigma} = \bar{\mu}(\xi)$, $\lambda = \mu$.

Таким образом, функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определены на полуполосе L , а условие (1) должно удовлетворяться при $\eta = 0$, $0 \leq \xi \leq 2\pi$. Подставим в это условие $\sigma = \lambda(\xi)$. Предварительно обозначим:

$$\varphi(z) = \varphi[\lambda(u)] = \theta(u), \quad \psi(z) = \psi[\lambda(u)] = \chi(u),$$

$$\varphi'(z) = \frac{\theta'(u)}{\lambda'(u)}, \quad \psi'(z) = \frac{\chi'(u)}{\lambda'(u)}$$

и подставим эти выражения в (1), причем вместо σ во втором члене слева напомним $\bar{\mu}(\xi)$.

Равенство (1) примет вид

$$\theta(\xi) + \overline{\mu'(\xi)} \frac{\overline{\theta'(\xi)}}{\lambda'(\xi)} + \overline{\chi(\xi)} = F_1 + iF_2, \quad (6)$$

где F_1 и F_2 — значения f_1 и f_2 , представленные в функции ξ .

Вводя обозначение

$$\zeta(u) = \mu(u) \frac{\theta'(u)}{\lambda'(u)} + \chi(u), \quad (7)$$

запишем условие (1) в виде

$$\theta(\xi) + \overline{\zeta(\xi)} = F_1 + iF_2.$$

Дифференцируя это равенство по ξ , получим

$$\theta'(\xi) + \overline{\zeta'(\xi)} = (-Y_n + iX_n)h, \quad h = \frac{ds}{d\xi} = |\lambda'|. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 = \frac{\theta'}{\lambda'}, \quad \Psi = \Psi_1 + i\Psi_2 = \overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z). \quad (9)$$

Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\lambda'^2} (\lambda'\zeta' - \mu'\theta') - \frac{\bar{\lambda} - \mu}{\lambda'^3} (\lambda'\theta'' - \lambda''\theta'), \quad (10)$$

и напряжения можно выразить следующим образом:

$$X_x = 2\Phi_1 - \Psi_1, \quad Y_y = 2\Phi_1 + \Psi_1, \quad X_y = \Psi_2. \quad (11)$$

Таким образом задача сводится к определению функций $\theta(u)$ и $\zeta(u)$, удовлетворяющих условию (8).

Представим правую часть этого равенства в форме рядов:

$$\begin{aligned} X_n h &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi), \\ -Y_n h &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\xi + d_n \sin n\xi), \end{aligned} \quad (12)$$

а искомые функции θ и ζ зададим рядами

$$\theta'(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inu}, \quad \zeta'(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inu}, \quad (13)$$

где α_n и γ_n — неопределенные комплексные коэффициенты.

Из условия (8) для этих коэффициентов получаем уравнения

$$\begin{aligned} 2(\alpha_n + \bar{\gamma}_{-n}) &= c_n + b_n + i(a_n - d_n), \\ 2(\alpha_{-n} + \bar{\gamma}_n) &= c_n - b_n + i(a_n + d_n). \end{aligned} \quad (14)$$

Этих уравнений недостаточно для определения коэффициентов. Дополнительные уравнения получаются из условия конечности Φ и Ψ в точке $\eta = \infty$. Для этого в выражениях этих функций все коэффициенты при различных степенях e^{-iu} нужно приравнять нулю.

Рассмотрим пример. Пусть контур C задан в форме

$$\begin{aligned} x &= v^2 - 1, \quad y = v(1 - av^2 + bv^4), \\ v &= \operatorname{ctg} \frac{\xi}{2}, \end{aligned}$$

где a, b — постоянные. При изменении ξ от нуля до 2π точка $z = x + iy$ описывает симметричную кривую с бесконечными ветвями, изображенную на рис. 1. Задача решается для правой полубесконечной области.

Так как при $u = i\eta$ $v = -i \operatorname{cth} \eta/2$, то $z = x + iy$ будет действительным, следовательно, разрез K расположен на действительной оси. При $\xi = 0$, $\eta = \infty$ получаем координату точки F , равную $z_0 = -1 + a + b$, а при $\xi = 0$, $\eta = 0$ координату G $z = \infty$.

Пусть, например,

$$b_n = c_n = d_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad a_1 = 1, \quad a_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

т. е.

$$X_n = \frac{\cos \xi}{h}, \quad Y_n = 0,$$

где

$$h^2 = y'^2 + y'^2, \quad x' = -v(1 + v^2), \quad y' = -1/2(1 + 3av^2 + 5bv^4)(1 + v^2).$$

В этом случае

$$2\alpha_1 = i, \quad 2\gamma_1 = -i, \quad \alpha_n = \gamma_n = 0, \quad n = 0, -1, \pm 2, \dots,$$

следовательно, на контуре C

$$\zeta' = -\theta', \quad \Psi = -\Phi \left(1 + \frac{\mu'}{\lambda'}\right).$$

Графики напряжений на контуре C в функции ξ представлены на рис. 2.

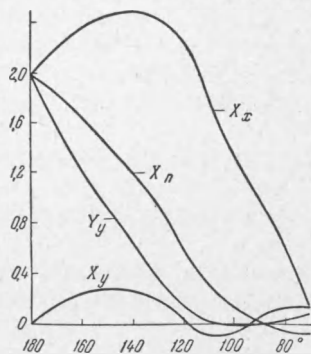


Рис. 2

Поступило
3 III 1954