

Л. А. СКОРНЯКОВ

СИСТЕМЫ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 V 1954)

В обычной евклидовой плоскости π рассматривается система Σ подмножеств, каждое из которых гомеоморфно или интервалу $(0, 1)$ или окружности. Подмножества системы Σ называются кривыми. Система Σ удовлетворяет следующей аксиоме А: *через любые две различные точки плоскости π проходит одна и только одна кривая системы Σ* . Оказывается, что в системе Σ нет кривых, гомеоморфных окружности. Более того, замыкание каждой кривой из системы Σ гомеоморфно или интервалу $(0, 1)$ (такие кривые называются бесконечными) или окружности (такие кривые называются полузамкнутыми). Точку из замыкания полузамкнутой кривой, не принадлежащую этой кривой, назовем ее концом. Бесконечные кривые, разумеется, не компактны.

Чтобы описать строение системы Σ , введем следующую конструкцию. Выберем в плоскости π точку O , не принадлежащую никакой полузамкнутой кривой. Построим сферу Π , касающуюся плоскости π в точке O . Пусть плоскость π' параллельна плоскости π и касается сферы Π в точке O' . Отобразим π на $\Pi \setminus O'$ * стереографически с центром в точке O , затем $\Pi \setminus (O \cup O')$ в π' также стереографически, но с центром в точке O , и, наконец, плоскость π' ортогонально спроектируем на π . В результате множество $\pi \setminus O$ гомеоморфно отобразится на себя. Если в π была задана система кривых Σ , то кривые из Σ перейдут в множества системы Σ^* . Точку O присоединим к тем и только к тем множествам из Σ^* , прообразами которых служат бесконечные кривые, проходящие через точку O . После этого система Σ^* превратится в систему кривых, которую будем называть системой, инверсной относительно Σ . Само описанное преобразование будем называть инверсией, точку O — центром инверсии. Из выполнения аксиомы А в системе Σ нетрудно вывести справедливость этой аксиомы в инверсной ей системе Σ^* .

Система Σ , состоящая из бесконечных кривых, называется бесконечной, система Σ^* , инверсная ей, — центральной. Центральная система состоит из пучка бесконечных кривых, проходящих через точку O (она называется центром системы Σ^*), и полузамкнутых кривых, имеющих конец в этой точке.

Основной результат содержится в следующей теореме:

Теорема. *Всякая система кривых на плоскости, удовлетворяющая аксиоме А, является или бесконечной или центральной.*

Следствие 1. *Если система Σ бесконечна и последовательно-сти точек*

$$a_1, \dots, a_n, \dots$$

и

$$b_1, \dots, b_n, \dots$$

* Через $A \setminus B$ обозначается дополнение множества B в множестве A .

сходятся к различным точкам a и b , соответственно, то последовательность кривых

$$[a_1b_1], \dots, [a_nb_n], \dots$$

имеет своим топологическим пределом* кривую $[ab]**$.

Для доказательства заметим, что бесконечная система кривых удовлетворяет условиям теоремы 1, § 3, ч. III книги (2). Поэтому наше следствие вытекает из теоремы 4, § 1, ч. III той же книги***.

Следствие 2. Если Σ^* — центральная система кривых, точка O — ее центр и последовательности точек

$$a_1, \dots, a_n, \dots$$

и

$$b_1, \dots, b_n, \dots$$

сходятся, соответственно, к точкам a и b , отличным друг от друга и от точки O , то последовательность кривых

$$[a_1b_1], \dots, [a_nb_n], \dots$$

имеет своим топологическим пределом кривую $[ab]$.

Вытекает из предыдущего следствия и непрерывности инверсии вне точки O .

Приведенные результаты могут быть перенесены на любое множество π , гомеоморфное евклидовой плоскости. При помощи методов, использованных для доказательства основной теоремы, можно показать, что на сфере не существует системы кривых, удовлетворяющей аксиоме А. Однако вопрос о существовании такой системы, например, на цилиндре и торе остается неясным.

Основная теорема и ее следствия могут иметь значение для качественной теории систем дифференциальных уравнений второго порядка.

Московское Высшее техническое училище
им. Баумана

Поступило
11 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. ² Н. Busemann, Metric Methods in Finsler Spaces and in Foundations of Geometry, London, 1942.

* (1), стр. 166.

** Через $[ab]$ обозначается кривая системы Σ , проходящая через точки a и b .

*** Следствие 1 может быть также доказано независимо от результатов книги (2).