

Н. С. СИНЮКОВ

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ НА СИММЕТРИЧЕСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 VI 1954)

1. Пусть V_n — риманово пространство с метрическим тензором g_{ij} (метрика может быть как знакоопределенной, так и неопределенной по знаку) и коэффициентами связности Γ_{ij}^k ((¹), стр. 367, 424). Предположим, что оно допускает точечное отображение на риманово пространство $\tilde{V}_n$ с метрическим тензором $\tilde{g}_{ij}$ и коэффициентами связности $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$, при котором геодезические V_n переходят в геодезические $\tilde{V}_n$. В общих по отображению координатах имеют место соотношения ((²), стр. 163)

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \psi_j + \delta_j^k \psi_i, \quad (1)$$

$$\tilde{R}_{ijk}^p = R_{ijk}^p + \delta_k^p \psi_{ij} - \delta_j^p \psi_{ik}, \quad (2)$$

где ψ_i — градиент; $\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j$; R_{ijk}^p и $\tilde{R}_{ijk}^p$ — тензоры кривизны пространств V_n и $\tilde{V}_n$, соответственно.

Здесь и в дальнейшем „ ∇ “ означает ковариантное дифференцирование по связности пространства V_n , а „ $\tilde{\nabla}$ “ — по связности пространства $\tilde{V}_n$, причем переход от одного к другому совершается в соответствии с формулами (1).

Геодезическое отображение V_n на $\tilde{V}_n$ называется тривиальным, если для него $\psi_i = 0$, а во всех других случаях — нетривиальным.

2. Докажем, что имеет место следующая

Теорема 1. Если риманово пространство V_n ($n > 2$) допускает нетривиальное геодезическое отображение на симметрическое риманово пространство $\tilde{V}_n$, то оно необходимо является пространством постоянной кривизны.

В самом деле, пусть пространство $\tilde{V}_n$ симметрическое, т. е. ((³), стр. 117)

$$\tilde{R}_{ijk|l}^p = 0. \quad (3)$$

Условия интегрируемости уравнений (3) имеют вид:

$$\tilde{R}_{p\alpha jk} \tilde{R}_{ilm}^{\alpha} + \tilde{R}_{piak} \tilde{R}_{jlm}^{\alpha} + \tilde{R}_{pija} \tilde{R}_{klm}^{\alpha} - \tilde{R}_{ijk} \tilde{R}_{palm}^{\alpha} = 0, \quad (4)$$

где индекс p опущен при помощи g_{ij} .

Вообще, все операции поднимания и опускания индексов в дальнейшем будут производиться при помощи метрического тензора пространства V_n .

Если в соотношениях (4) заменить тензор $\tilde{R}_{ilm}^{\alpha}$ по формулам (2), затем произвести полное свертывание с g^{hl} и результат просиммет-

рировать по индексам m, j и i, p , то получим

$$Q_{ijpm} + Q_{pjim} = 0, \quad (5)$$

где

$$Q_{ijpm} = g_{ij}\psi_{p\beta}R^\beta_m + g_{pm}\psi_{i\beta}R^\beta_j - R_{pm}\psi_{ij} - R_{ij}\psi_{pm}, \quad (6)$$

а $R_{ij} = R^\alpha_{ij\alpha}$ — тензор Риччи пространства V_n .

Заметим, что суммирование по p и k в (2) и (3), соответственно, дает

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-1)\psi_{ij}, \quad (7)$$

$$\bar{R}_{ij|l} = 0. \quad (8)$$

Обращаясь к условиям интегрируемости уравнения (8)

$$\bar{R}_{\alpha j}\bar{R}^\alpha_{ilm} + \bar{R}_{i\alpha}\bar{R}^\alpha_{jlm} = 0,$$

устанавливаем, свертывая их с g^{ij} и используя (7), что имеет место симметрия

$$\psi_{\alpha l}R^\alpha_m = \psi_{\alpha m}R^\alpha_l. \quad (9)$$

Из определения тензора Q_{ijpm} и (9) видно, что он обладает следующими свойствами:

$$Q_{ijpm} = Q_{jipm} = Q_{pmij}.$$

При наличии (5) это возможно только для

$$Q_{ijpm} = g_{ij}\psi_{p\beta}R^\beta_m + g_{pm}\psi_{i\beta}R^\beta_j - R_{pm}\psi_{ij} - R_{ij}\psi_{pm} = 0. \quad (10)$$

Представим эти соотношения в более удобной для наших целей форме. Для этого просуммируем в (10) по i и j , предварительно подняв один из индексов. Таким образом найдем следующее выражение для $\psi_{p\beta}R^\beta_m$:

$$n\psi_{p\beta}R^\beta_m = R\psi_{pm} + \Delta \cdot R_{pm} - \psi_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{pm}, \quad (11)$$

где $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ — скалярная кривизна пространства V_n , $\Delta = \psi_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. Если теперь в свою очередь в (11) просуммируем по p и m , получим

$$n\psi_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = R \cdot \Delta. \quad (12)$$

Наконец, принимая во внимание (11) и (12), представим (10) эквивалентно в виде:

$$\left(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}\right)(\Delta \cdot g_{mp} - n\psi_{mp}) + \left(R_{mp} - \frac{R}{n}g_{mp}\right)(\Delta \cdot g_{ij} - n\psi_{ij}) = 0.$$

Отсюда следует возможность только двух случаев:

$$1) R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij} = 0, \quad (13)$$

$$2) \Delta g_{ij} - n\psi_{ij} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим первый случай. Прежде всего отметим, что на основании (2) и (7) основные уравнения (3) можно представить так:

$$W^P_{ijk|l} = 0,$$

или, в соответствии с (1),

$$\begin{aligned} W^P_{ijk,l} + \delta^P_l \psi_\alpha W^\alpha_{ijk} - 2\psi_l W^P_{ijk} - \psi_i W^P_{ljk} - \\ - \psi_j W^P_{ilk} - \psi_k W^P_{ijl} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

здесь

$$W^P_{ijk} = R^P_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^P_k R_{ij} - \delta^P_j R_{ik})$$

тензор проективной кривизны пространства V_n .

Тензор W^P_{ijk} при наличии (13) обладает всеми алгебраическими свойствами тензора кривизны риманова пространства, в частности

W_{pijk} имеет косую симметрию по первым двум индексам. Поэтому, если в (15) опустить p вниз и просимметризовать левую часть по p, i , получим

$$g_{pi}\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} - \psi_i W_{pljk} + g_{il}\psi_\alpha W^\alpha_{pjk} - \psi_p W_{iljk} = 0. \quad (16)$$

Полное свертывание (16) с g^{pi} показывает, что

$$\psi_\alpha W^\alpha_{ijk} = 0.$$

Следовательно, (16) принимает вид:

$$\psi_i W_{pljk} + \psi_p W_{iljk} = 0.$$

Отсюда сразу заключаем, что $W_{iljk} = 0$. Но этим свойством при $n > 2$ характеризуются пространства постоянной кривизны ((²), стр. 165, 166). Тем самым первый случай рассмотрен до конца.

Для исследования второго случая нужно рассмотреть тензор

$$P^p_{ijk} = R^p_{ijk} + \frac{\Delta}{n} (\delta^p_k g_{ij} - \delta^p_j g_{ik}).$$

Так как теперь имеет место (14), уравнение (3) можно записать в форме

$$P^p_{ijk} u = 0.$$

Рассуждая дальше буквально так же, как в первом случае, но только по отношению к тензору P^p_{ijk} , получим, что пространство V_n — постоянной кривизны.

3. Доказанная теорема является значительным усилением известной теоремы Бельтрами о геодезическом отображении римановых пространств ((²), стр. 164). Действительно, по теореме Бельтрами любое риманово пространство V_n ($n \geq 2$), допускающее геодезическое отображение на пространство постоянной кривизны, само необходимо имеет постоянную кривизну. Но то же самое даст и наша теорема (правда, для $n > 2$), если вместо произвольного симметрического пространства $\tilde{V}_n$ взять пространство постоянной кривизны. Требование нетривиальности геодезического отображения теперь можно опустить, так как при тривиальном геодезическом отображении коэффициенты связности обоих пространств совпадают, а значит, совпадают их тензоры проективной кривизны, и поэтому из постоянства кривизны одного пространства следует постоянство кривизны другого (при $n > 2$).

Из основной теоремы 1 и указанного следствия очевидным образом вытекает теорема:

Теорема 2. *Римановы пространства V_n ($n > 2$) не допускают нетривиального геодезического отображения на симметрические римановы пространства, отличные от пространств постоянной кривизны.*

В заключение отметим, что приведенные здесь результаты и их доказательства верны не только для римановых симметрических пространств, но и для симметрических пространств аффинной связности с симметричным тензором Риччи (эквивафинных).

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VI 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1953.
² Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948. ³ Э. Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИЛ, 1949.