

А. Г. КОСТЮЧЕНКО

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1954)

В настоящей работе решается вопрос о единственности, а для определенного класса и о существовании решения задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(L, t)u \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

где  $u(x, t)$  — вектор-функция;  $P(L, t)$  — матрица, элементами которой являются полиномы от операторов Штурма—Лиувилля  $L_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - q_i(x_i)$

с коэффициентами, зависящими от времени. Предполагается, что функция  $q_i(x_i)$  имеет непрерывную производную и определенный порядок роста на бесконечности, который мы уточним в дальнейшем.

Метод, при помощи которого решается указанная задача, был получен в результате соединения метода обобщенных функций <sup>(1)</sup> и результатов авторов, занимающихся уравнением Штурма—Лиувилля <sup>(2-4)</sup>.

1. Введем в рассмотрение, как и в <sup>(1)</sup>, основные функции  $\Phi$ , соответствующие операторам  $L_i$ . По определению функция  $f(x_1, \dots, x_N)$  называется основной функцией, если она дважды непрерывно дифференцируема и выдерживает неограниченное число раз применение операторов  $L_i$  (бесконечно  $L$ -дифференцируема), причем удовлетворяются оценки  $|L_i^n f(x_1, x_2, \dots, x_N)| < \frac{A_{mn}}{(1+r^2)^m}$ ,  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_N^2$ .

Совокупность четных основных функций, удовлетворяющих неравенству  $|L^n f(x)| < A_n e^{-A_n x^p}$  обозначается через  $K_p^L$ .

2. Как известно, оператор  $Ly = y'' - q(x)y$ , заданный на полуоси, порождает преобразование Фурье—Штурма—Лиувилля (будем называть сокращенно Ф. Ш. Л.) по формулам

$$\widetilde{f(x)} = \psi(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda) dx, \quad \widetilde{\psi(\lambda)} = f(x) = \int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где  $\varphi(x, \lambda)$  — собственные функции оператора  $L$  с начальными условиями  $\varphi(0, \lambda) = 1$ ,  $\varphi'_x(0, \lambda) = 0$ ;  $\sigma(\lambda)$  — спектральная функция.

Лемма 1. Если  $f(x)$  выдерживает оператор  $L$  и преобразование Ф. Ш. Л. от  $f(x)$  и  $Lf(x)$  существует, то  $\widetilde{Lf} = -\lambda \widetilde{f}$ . Если  $\widetilde{p(L)f}$  существует, то  $\widetilde{p(L)f} = p(-s^2) \widetilde{f}$ , где  $\lambda = s^2$ , а  $p(L)$  — полином от оператора  $L$ .

Можно определить преобразование Ф. Ш. Л. от функции  $f(x_1, \dots, x_N)$  нескольких переменных, соответствующей системе операторов  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) по формуле

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \int_0^\infty dx_N \varphi_N(x_N, \lambda_N) \dots \int_0^\infty f(x_1, \dots, x_N) \varphi_1(x_1, \lambda_1) dx_1,$$

причем имеет место формула обращения. Будем считать, что  $|q_i(x_i)| < Ax^{p-1-\varepsilon}$ ,  $|q'_i(x_i)| < Bx^{p-1-\varepsilon}$ . При этих условиях имеет место следующая теорема:

**Теорема 1.** Преобразование Ф. Ш. Л. класса  $K_p^L$  совпадает с классом  $Z^{p'}$ . Класс  $Z^{p'}$  состоит из целых четных аналитических функций интегрального порядка роста  $p'$  и интегрируемых в квадрате в произведении с любым полиномом на каждой горизонтальной оси.

Наметим вкратце доказательство теоремы 1. Заменяя  $\varphi(x, \lambda)$  через  $\cos \sqrt{\lambda}x$  по формулам преобразования Левитана—Повзнера<sup>(4)</sup>, получим

$$\psi(s) = \int_0^\infty \cos sx V^* f(x) dx,$$

где  $\lambda = s^2$ , а оператор  $V^* f = f + \int_x^\infty K(y, x) f(y) dy$  является сопряженным к оператору преобразования  $V$ . Используя формулу В. А. Марченко  $L = VD^2 V^{-1}$ , нетрудно показать, что оператор  $V^*$  переводит пространство  $K_p^L$  в пространство  $K_p$ . Отсюда и следует утверждение теоремы. Аналогично доказывается:

**Теорема 2.** Преобразование Ф. Ш. Л. класса  $K^L$  совпадает с классом  $Z'$ , где  $K^L$  есть класс бесконечно  $L$ -дифференцируемых и финитных функций, а класс  $Z'$  состоит из целых аналитических функций интегрального порядка роста 1 и с любым полиномом интегрируемых в квадрате на вещественной оси.

**Теорема 3.** Преобразование Ф. Ш. Л. класса функций, интегрируемых в квадрате на отрезке  $[0, a]$  и равных нулю вне его, совпадает с классом функций экспоненциального типа  $a$  и интегрируемых в квадрате на вещественной оси.

Эта теорема является обобщением известной теоремы Палея—Винера<sup>(1)</sup>. Рассмотрим пространство  $Z_p^p$  целых четных аналитических функций порядка роста  $p$  и экспоненциально убывающих на вещественной оси с порядком  $p$ . Как можно вывести из результатов работы<sup>(1)</sup>,  $Z^p \subset Z^p$ . Поэтому можно утверждать, что  $\widetilde{Z_p^p} \subset K_p^L$ , т. е. обратное преобразование Ф. Ш. Л. функции  $\psi(s) \in Z_p^p$  экспоненциально убывает с порядком  $p'$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).

3. Под обобщенной функцией, определенной на пространстве основных функций  $\Phi$ , понимается линейный непрерывный функционал на пространстве  $\Phi$ . Если функция  $T(x)$  удовлетворяет оценке

$$|T(x)| < Ce^{\varepsilon x^p} \quad \text{при любом } \varepsilon > 0,$$

то в пространстве  $K_p^L$  функция  $T(x)$  определяет по формуле

$$(T, f) = \int_0^\infty T(x) f(x) dx$$

линейный непрерывный функционал  $(T, f)$ . Такие функционалы называются функционалами типа функции.

Теорема 4. Если в пространстве  $K_p^L$  имеются два функционала типа функции  $T_1$  и  $T_2$  и  $(T_1, f) = (T_2, f)$  при всех  $f$ , то  $T_1(x) = T_2(x)$  почти всюду.

Справедливость этой теоремы следует из полноты пространства  $K_p^L$  в  $L_2$  (по метрике  $L_2$ ), которую легко доказать, пользуясь тем, что  $V^*K_p^L = K_p$ . Аналогичная теорема имеет место и для пространства  $\widetilde{Z}_p^p$ .

4. Обобщенные функции можно складывать, умножать на числа,  $L$ -дифференцировать, брать преобразование Ф. Ш. Л. Эти действия определяются аналогично тому, как они определены в  $(1)$ .

Лемма 2. Если  $f(x) \in K_p^L(\widetilde{Z}_p^p)$ , то обобщенный сдвиг  $T_x^\xi f$  функции  $f(x)$   $(2)$  также принадлежит  $K_p^L(\widetilde{Z}_p^p)$ .

Этот результат следует из того, что  $\widetilde{T_x^\xi f} = \varphi(\xi, s^2) \widetilde{f(x)}$ , а  $\varphi(\xi, s^2)$  является мультипликатором в  $Z^p(\widetilde{Z}_p^p)$ .

Обобщенная\* функция  $T_1$  называется свертывателем в  $K_p^L(\widetilde{Z}_p^p)$ , если  $T_1\{T_x^\xi f\} \in K_p^L(\widetilde{Z}_p^p)$  (левая часть существует в силу леммы 2). Если  $T_1$  является свертывателем, то можно определить свертку двух обобщенных функций  $T_1$  и  $T_2$  по формуле  $T = T_2 * T_1 = T_2[(T_1, T_x^\xi f)]$ .

Пусть на пространстве  $\widetilde{\Phi}$  заданы две обобщенных функции  $g$  и  $T$ , причем  $g$  является мультипликатором в пространстве  $\widetilde{\Phi}$ . В этом случае определяется произведение двух обобщенных функций по формуле  $(gT, \psi) = (T, g\psi)$ . Легко доказывается, что  $\widetilde{g}$  будет свертывателем в пространстве  $\widetilde{\Phi}$ .

Теорема 5. Если  $g$  — мультипликатор в  $\widetilde{\Phi}$ , то имеет место равенство  $\widetilde{gT} = \widetilde{g} * \widetilde{T}$ .

Теорема 5 доказывается прямым подсчетом выражений  $(\widetilde{gT}, f) = (gT, f)$  и  $(\widetilde{g} * \widetilde{T}, f)$ .

Лемма 3. Пусть даны два функционала типа функции  $H$  и  $g$ . Если  $H$  является свертывателем в пространстве  $\widetilde{\Phi}$  и существует интеграл  $\int_0^\infty T_x^\xi H(x) g(x) dx$ , то свертка функционалов  $H$  и  $g$  является функционалом типа функции  $\int_0^\infty T_x^\xi H(x) g(x) dx$ .

5. Будем истолковывать уравнение  $(1)$  как уравнение относительно обобщенной вектор-функции  $u(x, t)$ , зависящей от  $t$  как от параметра и принадлежащей по  $x$  к некоторому основному пространству  $T(\Phi)$ , которое, так же как и пространство  $\Phi$ , подлежит определению. Применив к уравнению  $(1)$  преобразование Ф. Ш. Л., мы получим в пространстве  $\widetilde{T}(\Phi)$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = p(-s^2, t)v, \quad \widetilde{u(x, t)} = v(s, t) \quad (3)$$

с начальным условием  $v(s, 0) = v_0(s) = \widetilde{u_0(x)}$ . Если приведенный порядок системы  $(1)$   $p_0$ , то, как показано в  $(1)$ , элементы фундаменталь-

\* Идея дальнейших построений принадлежит В. М. Борок, которая их проводила для обычного преобразования Фурье  $(5)$ .

ной матрицы  $Q(s, t)$  уравнения (3) являются мультипликаторами в пространстве  $Z_{p_0+\varepsilon}^{p_0+\varepsilon}$ .

Отсюда, так же, как и в (1), следует

Основная теорема 6. Если начальная вектор-функция  $u_0(x)$  удовлетворяет неравенству  $|u_0(x)| < c_1 e^{cx^{p_0'-\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon > 0$ , то решение задачи Коши (1) — (2) существует в классе обобщенных вектор-функций  $u(x, t) \in T\left(Z_{p_0-\delta}^{p_0-\delta}\right)$  и всегда единственно в этом классе.

В частности, если задача Коши (1) — (2) имеет классическое решение  $u(x, t)$ , удовлетворяющее при каждом  $t$  неравенству

$$|u(x, t)| < c_1 e^{cx^{p_0'-\delta}}, \quad \delta > 0,$$

то это решение будет единственным в указанном классе функций. Допустимый порядок роста коэффициентов  $q_i(x_i)$  зависит, таким образом, от  $p_0'$ . Именно,  $|q_i(x_i)| < cx^{p_0'-1-\varepsilon}$ .

Пример. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

Матрица  $Q(s, t)$  имеет вид  $e^{-is^2t}$ ,  $p_0 = 2$ . Следовательно, можно утверждать, что решение задачи Коши для этого уравнения будет единственным в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(x, t)| < A_1 e^{Ax^{2-\delta}}, \quad \text{причем } |u_0(x)| < B_1 e^{Bx^{2-\varepsilon}}.$$

6. Система вида (1) называется параболической, если элементы матрицы  $Q(s, t)$  на вещественной оси экспоненциально убывают с порядком  $p$ , где  $p$  — порядок системы (т. е. элементы матрицы  $Q(s, t)$  принадлежат пространству  $Z_p^p$ ).

Теорема 7. Если система (1) параболическая и начальная функция  $u_0(x)$  удовлетворяет неравенству  $|u_0(x)| < ce^{cx^p}$  при любом  $\varepsilon > 0$ , то решение системы (1) существует в виде обычной функции.

Доказательство проводится по методу, примененному в (5), с заменой обычного сдвига обобщенным. Если задачу Коши (1) — (2) рассматривать в классе функций, допускающих оценку

$$|u(x, t)| < Ae^{cx^{p_0'+\varepsilon}},$$

то решение этой задачи не будет единственным. Соответствующий пример строится по методу, указанному в (1).

В заключение пользуясь случаем выразить глубокую благодарность Г. Е. Шилову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Киевский государственный университет  
им. Т. Г. Шевченко

Поступило  
28 IV 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Усп. матем. наук, 8, в. 6/58 (1953).  
<sup>2</sup> А. Я. Повзнер, Матем сборн., 23, в. 1 (1946). <sup>3</sup> И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 4, 309 (1951). <sup>4</sup> В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. общ., I, 327 (1952). <sup>5</sup> В. М. Борок, ДАН, 97, № 6 (1954).