

Е. П. КАЛУГИНА

# КЛАСС $L_\Phi$ КАК ВЫПУКЛОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 31 V 1954)

Пусть  $\Phi(u)$  есть выпуклая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\Phi(0) = 0, \Phi(-u) = \Phi(u);$  2)  $\Phi(u_1) > \Phi(u_2)$  при  $u_1 > u_2 \geq 0;$
- 3)  $\frac{\Phi(u)}{|u|} \rightarrow +\infty$  при  $u \rightarrow +\infty.$

Условию (1) будут удовлетворять, например, такие функции:  $|u|^p$  при  $p > 1; e^{|u|} - |u| - 1; |u|^p \ln(|u| + 1)$  ( $p > 1$ ).

Определение 1. Будем понимать под классом  $L_\Phi$  множество функций  $\{x(t)\}$ , определенных на интервале  $(a, b)$ , принимающих действительные значения и таких, что

$$\int_a^b \Phi |x(t)| dt < +\infty.$$

Очевидно, что  $L_\Phi$  есть выпуклое многообразие, т. е., если  $x_1, x_2 \in L_\Phi$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ , где  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , то также  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L_\Phi$ .

Орлич показал <sup>(1)</sup>, что для обращения выпуклого многообразия  $L_\Phi$  в линейал необходимо и достаточно, чтобы функция  $\Phi(u)$  обладала так называемым свойством  $(\Delta_2)$ , которое выражается неравенством

$$\Phi(2u) \leq K \Phi(u), \quad (\Delta_2)$$

для всех  $u \geq u_0 \geq 0$  и постоянного  $K > 0$ .

Целью настоящей статьи является дать другие условия, необходимые и достаточные, при которых  $L_\Phi$  — линейал. Но прежде чем их формулировать, нужно дать некоторые определения.

Обозначим  $(a = 0, b = 1)$

$$\rho(x) = \int_0^1 \Phi(x(t)) dt.$$

Определение 2. Назовем последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\Phi$   $\rho$ -сходящейся к элементу  $x_0 \in L_\Phi$ , если

$$\rho\left(\frac{x_n - x_0}{2}\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Определение 3. Назовем последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset L_\Phi$   $\rho$ -фундаментальной, если

$$\rho\left(\frac{x_n - x_m}{2}\right) \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow +\infty.$$

Определение 4. Будем говорить, что  $L_\Phi$  —  $\rho$ -полное множество, если выполнено следующее условие: для того, чтобы последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  была  $\rho$ -сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была  $\rho$ -фундаментальной.

Определение 5 <sup>(1)</sup>. Будем говорить, что последовательность функций  $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ , где  $x_n \in L_\Phi$ , сходится слабо к функции  $x_0(t)$ , где  $x_0 \in L$ , если имеет место:

1)  $\rho(x_n) \leq c$  для  $n = 1, 2, \dots$  и постоянного  $c$ ;

2)  $\int_0^t x_n(u) du \rightarrow \int_0^t x_0(u) du$  для всех  $t \in (0, 1)$ .

Следуя работе Л. В. Канторовича <sup>(2)</sup>, будем говорить, что элемент  $x_1 \in L_\Phi$  меньше элемента  $x_2 \in L_\Phi$ , если для почти всех  $t \in (0, 1)$   $x_1(t) \leq x_2(t)$  (при этом пишут  $x_1 < x_2$ ).

Назовем <sup>(2)</sup> верхней границей множества  $E \subset L_\Phi$  такой элемент  $\bar{x} \in L_\Phi$ , что для всех  $x \in E$   $x < \bar{x}$ . Наименьшую из всех верхних границ множества  $E$  назовем точной верхней границей  $E$  и будем обозначать ее  $\sup E$  (аналогичное определение дается нижней границе множества  $E$  и  $\inf E$ ).

Так же как и в работе <sup>(2)</sup>, назовем наибольшим пределом последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_n \{ \sup (x_n, x_{n+1}, \dots) \};$$

наименьшим пределом  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  назовем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_n \{ \inf (x_n, x_{n+1}, \dots) \}.$$

Определение 6. Будем говорить, что  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$   $(o)$ -сходится к элементу  $x_0 \in L_\Phi$ , если

$$x_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

при этом пишут

$$x_n \rightarrow x_0 (o).$$

Если из каждой подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  можно выделить частичную последовательность  $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^\infty$  такую, что  $x_{n_{k_i}} \rightarrow x_0 (o)$ , то будем говорить, что  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  сходится к  $x_0$  в смысле  $(*)$ -сходимости (или  $t$ -сходимости), и запишем  $x_n \rightarrow x_0 (*)$ , или  $x_n \rightarrow x_0 (t)$ . Определения  $(*)$ - и  $(o)$ -сходимостей принадлежат Л. В. Канторовичу <sup>(2)</sup>.

$(o)$ -сходимость последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  к  $x_0 \in L_\Phi$  означает, что почти везде в  $(0, 1)$

$$x_n(t) \rightarrow x_0(t) \text{ и } |x_n(t)| \leq \bar{x}(t), \text{ где } \bar{x} \in L_\Phi.$$

Теорема 1. Каждое из следующих четырех условий есть условие необходимое и достаточное для того, чтобы  $L_\Phi$  было линейным.

1<sup>o</sup>.  $L_\Phi$  есть  $\rho$ -полное множество.

2<sup>o</sup>. Функционал  $\rho(x)$  непрерывен относительно  $\rho$ -сходимости, т. е. из  $x_n \rightarrow x_0(\rho)$  следует, что  $\rho(x_n) \rightarrow \rho(x_0)$ .

3<sup>o</sup>. Из  $\rho$ -сходимости следует слабая сходимость (в определении Орлича).

4<sup>o</sup>.  $\rho$ -сходимость эквивалентна  $(*)$ -сходимости.

Рассмотрим теперь функционалы, определенные в  $L_\Phi$ .

**Определение 7.** Будем называть функционалом  $f(x)$ , определенный в  $L_\Phi$ ,  $\alpha$ -аддитивным функционалом, если для любых  $x_1, x_2 \in L_\Phi$  и чисел  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

**Замечание.** В дальнейшем будем рассматривать лишь такие функционалы  $f(x)$ , определенные в  $L_\Phi$ , для которых  $f(0) = 0$ .

Тогда для  $\alpha$ -аддитивных функционалов могут быть установлены следующие теоремы.

**Теорема 2.** *Каждый  $\alpha$ -аддитивный функционал  $f(x)$  есть аддитивный функционал, т. е. для любых  $x_1, x_2 \in L_\Phi$ , где  $x_1 + x_2 \in L_\Phi$ ,*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

**Определение 8.** Будем говорить, что функционал  $f(x)$  однороден, если из  $x, \lambda x \in L_\Phi$ , где  $\lambda$  — действительное число, следует

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

**Теорема 3.**  *$\alpha$ -аддитивный функционал есть однородный функционал.*

**Определение 9.** Назовем  $\alpha$ -аддитивный функционал  $f(x)$   $t$ -непрерывным, если  $x_n \rightarrow x_0$  ( $t$ ) влечет  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Назовем  $\alpha$ -аддитивный функционал  $f(x)$   $\rho$ -непрерывным, если  $x_n \rightarrow x_0$  ( $\rho$ ) влечет  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Нетрудно устанавливается, что понятия  $t$ -непрерывного и  $\rho$ -непрерывного функционала совпадают.

**Определение 10.** Будем говорить, что  $\bar{x} \in L_\Phi$  есть внутренняя точка, если существуют такие элементы  $x_1, x_2 \in L_\Phi$  и числа  $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , для которых  $\bar{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ , причем  $x_1 \neq x_2$ .

**Теорема 4.** *Для того чтобы  $\alpha$ -аддитивный функционал  $f(x)$  был  $\rho$ -непрерывен (или  $t$ -непрерывен), достаточно, чтобы он был  $\rho$ -непрерывен (или  $t$ -непрерывен) во внутренней точке вида  $qx_0 + (1-q) \cdot 0 = qx_0$ , где  $x_0 \in L_\Phi$  и  $0 < q < 1$ , или в точке 0.*

**Определение 11.** Будем называть функцию  $\Psi(v)$  дополнительной к функции  $\Phi(u)$  рассматриваемого вида, если она определяется следующими равенствами:

$$\Psi(v) = \max_{u \geq 0} [uv - \Phi(u)] \text{ при } v \geq 0, \quad \Psi(v) = \Psi(-v) \text{ при } v < 0.$$

**Теорема 5.** *Если  $f(x)$  есть  $t$ -непрерывный (или  $\rho$ -непрерывный) функционал, то он имеет следующее общее аналитическое представление для любого  $x \in L_\Phi$ :*

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \beta(t) dt, \quad (o),$$

причем  $\beta(t)$  — такая функция, для которой произведение  $q\beta(t)$  при некотором  $q$ , где  $0 < q < 1$ , интегрируемо с функцией  $\Psi(v)$ , дополнительной к  $\Phi(u)$ .

Если функция  $\Phi(u)$  обладает свойством  $(\Delta_2)$ , то  $L_\Phi$  — линейное множество, которое Орличем  $(1,3)$  обращается в линейное нормированное пространство путем введения в нем нормы

$$\|x\|_{L_\Phi} = \text{b. s.} \left| \int_0^1 x(t) g(t) dt \right|, \quad \sigma_g \leq 1$$

где  $\sigma_g = \int_0^1 \Psi |g(t)| dt$ , причем  $\Psi(v)$  — функция, дополнительная к  $\Phi(u)$ .

Орлич показывает <sup>(1,3)</sup>, что каждый линейный функционал, определенный обычным образом, имеет форму (о); и, наоборот, каждый функционал, имеющий представление по формуле (о), есть линейный функционал. Итак, если  $\Phi(u)$  обладает свойством  $(\Delta_2)$ , то понятия  $t$ -непрерывного функционала и линейного функционала эквивалентны.

Ленинградский кораблестроительный  
институт

Поступило  
28 V 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> W. Orlicz, Bull. de l'Acad. Polon., ser. (A), II, 1, 93 (1936). <sup>2</sup> Л. В. Канторович, Матем. сборн., 2 (44):1 (1937). <sup>3</sup> W. Orlicz, Bull. de l'Acad. Polon., ser. (A), 7, 3, 207 (1932).