

МАТЕМАТИКА

Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ
ПРОИЗВОДНЫХ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ
ТИПА БЕССЕЛЯ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1954)

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(B, t)u(x, t), \quad (1)$$

где $0 \leq x < \infty$, $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)\}$ — искомая вектор-функция. $P(B, t)$ означает матрицу (m строк, m столбцов), элементами которой являются операторы Бесселя $B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$ одного и того же порядка $p > 0$. Коэффициенты при операторе B и его степенях могут быть постоянными либо непрерывно зависеть от времени. К системе (1) присоединяются начальное и краевое условия:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (2)$$

Требуется найти класс функций, в котором задача Коши (1) — (2) корректна, т. е. такой класс, в котором у системы (1) существует решение $u(x, t)$, входящее в класс при каждом $t \geq 0$ и удовлетворяющее условиям (2). В этом классе решение должно быть единственным и непрерывно зависеть от начальной функции $u_0(x)$.

Для решения указанного круга вопросов в настоящей работе используется метод обобщенных функций, разработанный И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в ⁽¹⁾ в сочетании с методом преобразования Фурье — Бесселя, который здесь играет ту же роль, что и метод преобразований Фурье в работе ⁽¹⁾. При получении общих формул решения задачи Коши (1) — (2) для регулярных систем (см. ниже) большое значение имеют операторы обобщенного сдвига, соответствующие оператору Бесселя $B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx}$, изученные в работе Б. М. Левитана ⁽²⁾.

1. Комплекснозначная функция $\varphi(x)$ называется основной функцией, если она бесконечно дифференцируема, четна и удовлетворяет оценкам $|D^q \varphi(x)| \leq \frac{C_{qr}}{(1+x^2)^r}$ при любых целых r и $q > 0$, где C_{qr} — постоянные, не зависящие от x .

Обозначим через S пространство всех основных функций. Четные функции из пространства S , введенного в ⁽¹⁾, образуют рассматриваемое нами пространство основных функций. К основным функциям можно применять оператор Бесселя сколько угодно раз, причем

$$|B^q \varphi(x)| \leq \frac{A_{qr}}{(1+x^2)^r}. \quad (3)$$

Для основных функций определены прямое и обратное преобразования Фурье — Бесселя ⁽²⁾:

$$\psi(s) = \widetilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty \varphi(x) j_p(sx) x^{2p+1} dx, \quad (4)$$

$$\widetilde{\psi}(s) = \varphi(x) = \frac{1}{2^{2p} \Gamma^2(p+1)} \int_0^\infty \psi(s) j_p(sx) s^{2p+1} ds,$$

где

$$j_p(sx) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(sx)^p} J_p(sx).$$

Имеют место формулы:

$$p(B) \widetilde{\varphi}(s) = \widetilde{p(-x^2) \varphi(x)}; \quad \widetilde{p(B) \varphi(x)} = p(-s^2) \widetilde{\varphi}(s), \quad (5)$$

где $p(B)$ — любой полином от оператора Бесселя.

Теорема 1. Преобразование Фурье — Бесселя отображает пространство S основных функций взаимно-однозначно в самого себя.

Мультипликатором ⁽¹⁾ в пространстве S является любая четная бесконечно дифференцируемая функция, которая вместе со всеми своими производными возрастает при $x \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени x . Под сверткой основных функций $f(x)$ и $g(x)$ мы будем понимать функцию, определенную формулой

$$f(x) * g(x) = \int_0^\infty T_x^\nu f(x) g(y) y^{2p+1} dy. \quad (6)$$

Здесь T_x^ν — оператор обобщенного сдвига ⁽²⁾, соответствующий оператору Бесселя. Если $\varphi(x) \in S$, то $T_x^\nu \varphi(x) \in S$ по обоим аргументам. Имеет место формула:

$$\widetilde{g * f} = \widetilde{g} \cdot \widetilde{f}, \quad (7)$$

где $g(x)$ и $f(x)$ — основные функции. Из (7), в частности, видно, что свертка коммутативна.

2. Обобщенной функцией мы будем, как и в ⁽¹⁾, называть линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S основных функций. Функционалами типа функции мы будем называть функционалы, действующие на произвольную функцию $\varphi(x) \in S$ по формуле

$$(T, \varphi) = \int_0^\infty T(x) \varphi(x) x^{2p+1} dx. \quad (8)$$

Локально суммируемая функция $f(x)$ определяет в S главный функционал ⁽¹⁾, если она растет при $x \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени x . Главный функционал действует на любую функцию $\varphi(x) \in S$ по формуле (8).

Теорема 2. Если функции $T_1(x)$ и $T_2(x)$ определяют главные функционалы (T_1, φ) и (T_2, φ) , которые различаются на множестве положительной меры, то функционалы (T_1, φ) и (T_2, φ) различны, т. е. существует функция $\varphi_0(x) \in S$ такая, что $(T_1, \varphi_0) \neq (T_2, \varphi_0)$.

Обратно, если функционалы (T_1, φ) и (T_2, φ) различны, то $T_1(x)$ и $T_2(x)$ различаются на множестве положительной меры.

Оператор Бесселя действует на обобщенную функцию T по формуле

$$(BT, \varphi) = (T, B\varphi). \quad (9)$$

К обобщенным функциям можно применять прямое и обратное преобразования Фурье — Бесселя

$$(\tilde{T}, \varphi) = (T, \tilde{\varphi}). \quad (10)$$

Функционал $\tilde{T}$ действует в том же пространстве S основных функций.

Свертку двух любых обобщенных функций, следуя В. М. Борок ⁽⁴⁾, определим по формуле

$$(T_1 * T_2, \varphi) = [T_2, (T_1', T_x^h \varphi(x))]; \quad (11)$$

здесь T_1' — матрица, транспонированная к T_1 .

Определение (11) имеет смысл, если обобщенная функция T_1 является свертывателем в пространстве S основных функций, т. е.

$$(T_1, T_x^h f(x)) = g(y) \in S. \quad (12)$$

Теорема 3. Если обобщенная функция T является мультипликатором в пространстве S основных функций, то ее преобразование Фурье — Бесселя $\tilde{T}$ является свертывателем в этом же пространстве.

Имеет место формула

$$\widetilde{T_1 \cdot T_2} = \tilde{T}_1 * \tilde{T}_2, \quad (13)$$

где T_1 — мультипликатор в S .

3. Для решения задачи Коши (1) — (2) истолкуем (1) как систему относительно обобщенной вектор-функции $u(x, t)$, зависящей от t как от параметра и действующей над пространством S основных функций. При помощи преобразования Фурье — Бесселя мы можем от (1) — (2) перейти к системе

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(-s^2, t) v(s, t), \quad (1')$$

$$v(s, 0) = v_0(s) = \widetilde{u_0(x)}. \quad (2')$$

Условие $\left. \frac{dv(s, t)}{ds} \right|_{s=0} = 0$ выполняется в силу $j_p'(0) = 0$.

Как и в (1'), имеет место теорема:

Теорема 4. Если в пространстве S основных функций (следовательно, и в $T[S]$) элементы матриц $Q(s, 0, t)$ и $Q(s, t, t_0)$ являются мультипликаторами при любых $t, 0 \leq t \leq t_0$, то система (1') имеет решение при любой начальной обобщенной вектор-функции $v_0(s) \in T^{(m)}[S]$: $v(s, t) = Q(s, 0, t) \cdot v_0(s)$, причем это решение единственно и непрерывно зависит от начальной вектор-функции $v_0(s)$ в смысле непрерывности для пространства $T^{(m)}[S]$.

Система вида (1) называется регулярной, если

$$|D^q Q(\sigma, 0, t)| \leq C_{qh} (1 + \sigma^2)^h, \quad (14)$$

где $\sigma = \text{Re } s$, $h > 0$ фиксированно, q — любое целое число.

Для регулярных систем $Q(s, 0, t)$ является свертывателем в пространстве $T[S]$, и решение задачи Коши (1) — (2) имеет вид:

$$u(x, t) = \widetilde{Q(s, 0, t) * u_0(x)}. \quad (15)$$

Теорема 5. Если вектор-функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству $|u_0(x)| \leq c(1 + x^2)^h$, то решение задачи Коши (1) — (2) для регулярных систем существует в классе обобщенных вектор-функ-

ций $u(x, t)$, которые при каждом $t \geq 0$ принадлежат пространству $T[S]$, причем это решение всегда единственно в $T[S]$.

Теоремы 4 и 5 можно доказать для систем более общего вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P(B_1, B_2, \dots, B_n, t)u(x, t) \quad (1'')$$

с начальным и краевым условием (2), где $B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2p_i + 1}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $p_i > 0$ — любые вещественные числа, подобно тому как это делается в (5).

4. Систему (1) мы будем называть параболической, если матрица $Q(s, t_0, t)$ удовлетворяет на вещественной оси оценке $|Q(s, t_0, t)| \leq c_1 e^{-c|s|^{2q}}$, где q — наивысшая степень операторов Бесселя в (1). Для выполнения этой оценки достаточно (3), чтобы действительные части всех корней матрицы $\lambda E - P_1(-s^2, t)$ ($P_1(-s^2, t)$ — матрица старших членов в $P(-s^2, t)$) были при $s^2 = 1$ отрицательными числами. Для параболических систем свертка $Q(s, t_0, t) * u_0(x)$ есть обычная функция, и решение задачи Коши (1) — (2) записывается в виде

$$u(x, t) = \widetilde{Q(s, t_0, t) * u_0(x)} = \int_0^\infty \widetilde{T_x^p Q(s, t_0, t)(x)} u_0(y) y^{2p+1} dy. \quad (16)$$

В частности, для параболического уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

решение задачи Коши (1) — (2) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{(-1)^{(p-1)/2} e^{-x^2/4t}}{x^{p+2} t} \int_0^\infty e^{-y^2/4t} J_p\left(-\frac{xy}{2t}\right) u_0(y) y^{p+1} dy. \quad (17)$$

Для p целых и полуцелых формула (17) представляет известный интеграл Пуассона, дающий решение сферически-симметричной задачи Коши для уравнения теплопроводности в $(2p+2)$ -мерном пространстве.

Автор приносит глубокую благодарность проф. Г. Е. Шилову за руководство.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
28 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Усп. матем. наук, 8, в. 6 (1953).
² Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 6, в. 2 (1951). ³ И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, А, 1, в. 7 (1938). ⁴ В. М. Борок, ДАН, 97, № 6 (1954). ⁵ А. Г. Костюченко, ДАН, 98, № 1 (1954).