

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 7 VI 1954)

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_C p(s) \lg \frac{1}{r} ds = q(\sigma), \quad (1)$$

позволяющее найти плотность $p(s)$ логарифмического потенциала простого слоя, расположенного на гладкой кривой C длины l по заданному значению $q(\sigma)$ потенциала на C ; s, σ — дуговые координаты точек $z, \zeta \in C$, причем $r = |z - \zeta|$.

Обозначим через D_α класс функций $f(s)$, непрерывных на C , для которых модуль непрерывности на C

$$\omega(\delta; f) = \sup |f(s) - f(\delta)|, \quad |s - \sigma| \leq \delta,$$

удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\omega(\delta; f) \leq A \left(\lg \frac{a}{\delta} \right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad a > l. \quad (2)$$

Если $\theta(s) \in D_\beta$, $\beta > 1$, где $\theta(s)$ — угол между вещественной осью и касательной к C в точке с дуговой координатой s , рассматриваемый как функция s , то условие $p(s) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$, достаточно для того, чтобы для $0 < \sigma < l$ мы имели право дифференцировать по σ левую часть (1) под знаком интеграла^(1, 4); в настоящей заметке даны некоторые достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $q(\sigma)$ для законности такого дифференцирования; эти результаты могут представить интерес как математическое обоснование решения контактной задачи теории упругости (см., например, ⁽¹⁰⁾).

2. Теорема 1. Пусть точечное множество E состоит из конечного числа дуг, расположенных на C ; пусть мы имеем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\varphi(z) dz}{z - \zeta} = f(\zeta), \quad (3)$$

где ζ лежит внутри E и интеграл понимается в смысле главного значения Коши; тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & |f[\zeta(\sigma_0 + \delta)] - f[\zeta(\sigma_0)]| \leq \\ & \leq C_1 \int_{e'} \frac{\omega(|\sigma - \sigma_0|; \varphi)}{|\sigma - \sigma_0|} d\sigma + C_2 \delta \int_{E' - e'} \frac{\omega(|\sigma - \sigma_0|; \varphi)}{(\sigma - \sigma_0)^2} d\sigma + C_3 \omega(\delta; \varphi) **, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\omega(\delta; \varphi)$ — модуль непрерывности функции $\varphi[z(s)]$, рассматриваемой как функция s ; $e' = [\sigma_0 - 2\delta, \sigma_0 + 2\delta]$, а $E' - e'$ — множество, пробегаемое координатой s , когда z пробегает E .

* Свойства этого класса функций детально рассмотрены в ⁽²⁾.

** Предполагается существование первого интеграла.

Для доказательства достаточно воспроизвести рассуждения И. И. Привалова и Н. И. Мусхелишвили (см. ⁽⁵⁾, гл. III, § 4.5; ⁽⁶⁾, § 19; см. также ⁽³⁾).

В частности, если $\varphi(z) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$, то $f(\zeta) \in D_{\alpha-1}$ (², ⁹).

Теорема 2. Если $f(\zeta) \in D_\alpha$, $\alpha > 1$, то для z внутри E имеем $\varphi(z) \in D_{\alpha-1}$.

Для доказательства достаточно выписать в явной форме решение сингулярного интегрального уравнения (3)*; так как все функции, кроме $f(\zeta)$, входящие в это решение, удовлетворяют внутри E условию Липшица с показателем единица, то $\varphi(z) \in D_{\alpha-1}$ (см. также (², ⁹)).

3. Теорема 3. Пусть множество E лежит на вещественной оси; если мы имеем интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_E p(x) \lg \frac{1}{|y-x|} dx = q(y), \quad y \in E, \quad (5)$$

и если для y внутри E существует производная $q'(y) \in D_\alpha$, $\alpha > 2$, то уравнение (5) имеет решение $p(x) \in D_{\alpha-1}$, которое можно найти, решая сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{2\pi} \int_E \frac{p(x) dx}{x-y} = q'(y), \quad y \in E. \quad (5')$$

Действительно, будем искать решение $p(x)$ уравнения (5) в классе D_β , $\beta > 1$; в таком случае мы имеем право произвести дифференцирование в левой части (5) под знаком интеграла и получим (5'); по теореме 2 из условия $q'(y) \in D_\alpha$ вытекает, что $p(x) \in D_{\alpha-1}$, где $\alpha - 1 > 1$.

Аналогично доказывается:

Теорема 4. Пусть множество E лежит на единичной окружности, причем пусть $\varphi \in E_1 \subset [0, 2\pi]$ для $e^{i\varphi} \in E$. Если мы имеем интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_1} p(\varphi) \lg \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \right|} d\varphi = q(\theta), \quad \theta \in E_1, \quad (6)$$

и если для θ внутри E_1 существует производная $q'(\theta) \in D_\alpha$, $\alpha > 2$, то уравнение (6) имеет решение $p(\varphi) \in D_{\alpha-1}$, которое можно найти, решая сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_1} p(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi = q'(\theta), \quad \theta \in E_1. \quad (6')$$

4. Мы рассматривали до сих пор решение интегрального уравнения (1) в предположении, что заданная функция $q(\sigma)$ имеет производную, обладающую определенным модулем непрерывности; отбросим теперь это ограничение и решим (1) при единственном предположении, что заданная функция $q(\sigma)$ непрерывна на E ; будем считать заданной величину

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_E p(s) ds.$$

Обозначим через B область, представляющую собою плоскость, разрезанную вдоль E ; через

$$G(z; \infty) = g(z; \infty) - ih(z; \infty) \quad (7)$$

обозначим комплексную функцию Грина в области B с особенностью на бесконечности; обозначим через $p_0(s)$ плотность такого неотрица-

* См. (⁷), § 27, формула (8) при $a = 0$, $b = 1$, $m = 1/2$.

тельного распределения на E единичной массы, для которого

$$\frac{1}{2\pi} \int_E p_0(s) \lg \frac{1}{|z-\zeta|} ds = \gamma, \quad \zeta \in E, \quad (8)$$

где γ — константа Робена области ((⁸), гл. II, § 4; гл. V, § 3).

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_E [p(s) - mp_0(s)] \lg \frac{1}{z-\zeta} ds, \quad (9)$$

регулярную во всей области B , включая бесконечно удаленную точку; на множестве E ее вещественная часть имеет значение

$$\operatorname{Re} \{\varphi(\zeta)\} = q(\sigma) - m\gamma, \quad \zeta \in E. \quad (10)$$

Функция $\varphi(\zeta)$ может быть выражена через эти граничные значения своей вещественной части посредством интеграла

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_E q(t) T(\zeta; t) |dt| - m\gamma, \quad (11)$$

где $T(\zeta; t)$ — ядро Шварца области B ((⁷), § 41).

Так как $\zeta \in B$, то, дифференцируя (11) по ζ , получим

$$\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_E \frac{p(s) - mp_0(s)}{z-\zeta} ds. \quad (12)$$

Пользуясь основной леммой И. И. Привалова ((⁵), гл. III, § 8), мы легко найдем решение нашего уравнения

$$p(s) = mp_0(s) - ie^{i\theta(s)} \left\{ \left[\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \right]^+ - \left[\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \right]^- \right\}. \quad (13)$$

Ядро Шварца выражается через комплексную функцию Грина области B ; для функции $p_0(s)$ имеем ((⁸), гл. V, § 3)

$$p_0(s) = h'(z; \infty). \quad (14)$$

Харьковский
авиационный институт

Поступило
24 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 8, 9—10, 591 (1947). ² Л. Г. Магнарадзе, там же, 8, 8, 509 (1947). ³ Л. Г. Магнарадзе, ДАН, 68, № 4 (1949). ⁴ Я. Л. Геронимус, ДАН, 91, № 6 (1953). ⁵ И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. ⁶ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946. ⁷ С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, М.—Л., 1949. ⁸ Р. Неванlinna, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941. ⁹ М. Б. Гагуа, Усп. матем. наук, 8, № 1 (53), 121 (1953). ¹⁰ И. Я. Штерман, Контактная задача теории упругости, М.—Л., 1949.