

И. И. ТАЛЪЯНСКИЙ

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 2 IV 1954)

При попытках объяснения мезонно-нуклонного взаимодействия при помощи теории, в которой мезонное поле описывается уравнением второго порядка, возникает, как известно, ряд трудностей (дипольная трудность, неперенормируемость отдельных вариантов теории и т. д.). В то же время известно, что эти трудности не возникают, если в качестве уравнения мезонного поля взять дифференциальное уравнение, содержащее производные выше второго порядка. Использование регулярных потенциалов, получающихся в теории с высшими производными, приводит к хорошему согласию с экспериментом при решении многих задач (см., например, ⁽¹⁾). Однако построение последовательной теории полей, описываемых уравнениями с высшими производными, наталкивается на известную трудность, заключающуюся в том, что энергия мезонного поля в вакууме оказывается в общем случае величиной положительно-неопределенной ⁽²⁻⁴⁾.

Целью настоящей работы является исследование вопроса о возможности получения положительно-определенного выражения для энергии мезонного поля в вакууме при некоторых предположениях.

Рассмотрим мезонное поле, описываемое уравнением ⁽²⁾

$$(\square - \mu_1^2)(\square - \mu_2^2)\varphi(x; \mu_1, \mu_2) = 0, \quad (1)$$

где $\square$ — оператор Даламбера; μ_1 и μ_2 — постоянные; $x = (r, t)$ — совокупность пространственных и временной координат. (Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$.)

Уравнение (1) может быть получено при помощи вариационного принципа из следующего лагранжиана:

$$L = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha} \square \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \mu_1^2 \mu_2^2 \varphi^* \varphi + \text{компл. сопр.} \quad (2)$$

Соответствующий этому лагранжиану тензор энергии—импульса имеет вид:

$$T_{\alpha\beta} = (\mu_1^2 + \mu_2^2) \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha} \square \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\beta} \square \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \square \varphi + \text{компл. сопр.} - \delta_{\alpha\beta} L. \quad (3)$$

Введем далее две вспомогательные функции φ_1 и φ_2 при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x; \mu_1, \mu_2) &= (\square - \mu_2^2)\varphi(x; \mu_1, \mu_2); \\ \varphi_2(x; \mu_1, \mu_2) &= (\square - \mu_1^2)\varphi(x; \mu_1, \mu_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} (\square - \mu_1^2) \varphi_1(x; \mu_1, \mu_2) &= 0; \\ (\square - \mu_2^2) \varphi_2(x; \mu_1, \mu_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) следует, что

$$\varphi(x; \mu_1, \mu_2) = \frac{\varphi_1(x; \mu_1, \mu_2) - \varphi_2(x; \mu_1, \mu_2)}{\mu_1^2 - \mu_2^2}. \quad (6)$$

Будем считать φ_1 и φ_2 периодическими функциями, причем основной областью периодичности выберем куб объема V . Тогда мы можем записать их в виде

$$\varphi_j(x; \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left[\Phi_+^{(j)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - iK_j' t} + \Phi_-^{(j)*}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + iK_j' t} \right] \quad (j = 1, 2), \quad (7)$$

где $K_j = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_j^2}$.

При помощи (3), (6) и (7) мы получим для энергии мезонного поля $H = - \int T_{44}(d\mathbf{r})$ выражение:

$$H = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^2 \frac{2}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k}^2 + \mu_i^2) \left[\Phi_+^{(i)*}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) \Phi_+^{(i)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) + \Phi_-^{(i)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) \Phi_-^{(i)*}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) \right]. \quad (8)$$

Выражение (8), вообще говоря, может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от вида функций $\Phi_{\pm}^{(1)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2)$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2)$. Последние определяются заданием начальных данных для функций φ_1 и φ_2 .

Пусть в некоторый начальный момент времени $t = 0$ функции φ_1 и φ_2 равны φ_1^0 и φ_2^0 , соответственно. Тогда, если потребовать, чтобы для фурье-компонент этих функций $\Phi_{\pm}^{(1)0}$ и $\Phi_{\pm}^{(2)0}$ выполнялось соотношение

$$\Phi_{\pm}^{(1)0}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) = \Phi_{\pm}^{(2)0}(\mathbf{k}; \mu_2, \mu_1), \quad (9)$$

то как легко видеть, аналогичное соотношение будет иметь место и для функций $\Phi_{\pm}^{(1)}$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}$:

$$\Phi_{\pm}^{(1)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) = \Phi_{\pm}^{(2)}(\mathbf{k}; \mu_2, \mu_1). \quad (10)$$

А из последнего равенства, в силу (6), следует, что

$$\varphi(x; \mu_1, \mu_2) = \varphi(x; \mu_2, \mu_1). \quad (11)$$

Таким образом, выбор начальных данных в форме (9) приводит к тому, что функция φ оказывается симметричной относительно μ_1 и μ_2 . Обратное, очевидно, также имеет место, т. е. наложение условия симметрии (11) эквивалентно выбору начальных данных в форме (9). Выражение для энергии (8) оказывается при этом, благодаря (10), всегда положительным.

Запишем теперь $\Phi_{\pm}^{(1)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2)$ и $\Phi_{\pm}^{(2)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2)$ в виде:

$$\Phi_{\pm}^{(j)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) = a_{\mathbf{k}\pm}^{(j)}(\mu_1, \mu_2) U_{\pm}^{(j)}(\mathbf{k}; \mu_1, \mu_2) \quad (j = 1, 2). \quad (12)$$

В классической теории $a_{k\pm}^{(j)}(\mu_1, \mu_2)$ — числа, в квантовой это будут операторы поглощения частиц в соответствующих состояниях.

Переход от классической теории к квантовой, как обычно (см., например, (5)), достигается тем, что функция φ рассматривается как оператор, для которого операция взятия производной по времени определена при помощи соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = i[H, \varphi]. \quad (13)$$

Подставляя сюда φ из (6), (7) и H из (8), а также учитывая (12), мы найдем, что (13) выполнено, если имеют место следующие равенства:

$$U_{\pm}^{(j)}(k; \mu_1, \mu_2) U_{\pm}^{(j)*}(k; \mu_1, \mu_2) = \frac{|\mu_1^2 - \mu_2^2|}{2\sqrt{k^2 + \mu_j^2}} \quad (j = 1, 2), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [a_{k\pm}^{(1)}(\mu_1, \mu_2), a_{k\pm}^{(1)*}(\mu_1, \mu_2)] &= \varepsilon(\mu_1, \mu_2), \\ [a_{k\pm}^{(2)}(\mu_1, \mu_2), a_{k\pm}^{(2)*}(\mu_1, \mu_2)] &= \varepsilon(\mu_2, \mu_1), \end{aligned} \quad (15)$$

а остальные скобки Пуансона равны нулю. Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mu_1, \mu_2) &= \begin{cases} 1, & \mu_1 > \mu_2; \\ -1, & \mu_1 < \mu_2; \end{cases} \\ \varepsilon(\mu_1, \mu_2) &= -\varepsilon(\mu_2, \mu_1). \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (15) выполняются, если

$$\begin{aligned} a_{k\pm}^{(1)*} a_{k\pm}^{(1)} &= N_{k\pm}^{(1)}; \quad a_{k\pm}^{(1)} a_{k\pm}^{(1)*} = N_{k\pm}^{(1)} + 1; \\ a_{k\pm}^{(2)*} a_{k\pm}^{(2)} &= N_{k\pm}^{(2)} + 1; \quad a_{k\pm}^{(2)} a_{k\pm}^{(2)*} = N_{k\pm}^{(2)} \quad \text{при } \mu_1 > \mu_2; \\ a_{k\pm}^{(1)*} a_{k\pm}^{(1)} &= N_{k\pm}^{(1)} + 1; \quad a_{k\pm}^{(1)} a_{k\pm}^{(1)*} = N_{k\pm}^{(1)}; \\ a_{k\pm}^{(2)*} a_{k\pm}^{(2)} &= N_{k\pm}^{(2)}; \quad a_{k\pm}^{(2)} a_{k\pm}^{(2)*} = N_{k\pm}^{(2)} + 1 \quad \text{при } \mu_1 < \mu_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где $N_{k+}^{(1)}$ и $N_{k+}^{(2)}$ — некоторые неотрицательные целые квантовые числа.

Из (17) следует, что при любых μ_1 и μ_2 имеют место равенства

$$\begin{aligned} a_{k+}^{(1)*} a_{k+}^{(1)} + a_{k-}^{(1)*} a_{k-}^{(1)} &= N_{k+}^{(1)} + N_{k-}^{(1)} + 1; \\ a_{k+}^{(2)*} a_{k+}^{(2)} + a_{k-}^{(2)*} a_{k-}^{(2)} &= N_{k+}^{(2)} + N_{k-}^{(2)} + 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (14) и (18) в (8), получим:

$$H = \varepsilon(\mu_1, \mu_2) \sum_k \left\{ V \sqrt{k^2 + \mu_1^2} (N_{k+}^{(1)} + N_{k-}^{(1)} + 1) - V \sqrt{k^2 + \mu_2^2} (N_{k+}^{(2)} + N_{k-}^{(2)} + 1) \right\}. \quad (19)$$

Это выражение не является положительно-определенным, если $N_{k\pm}^{(1)}$ и $N_{k\pm}^{(2)}$ — произвольные числа. Однако в случае, когда функция φ симметрична относительно μ_1 и μ_2 , из соотношений (10), (12), (14) и (17) следует, что имеют место равенства:

$$N_{k+}^{(1)} = N_{k+}^{(2)} = N_{k+}, \quad N_{k-}^{(1)} = N_{k-}^{(2)} = N_{k-}. \quad (20)$$

Энергия поля (19) тогда запишется:

$$H = \varepsilon(\mu_1, \mu_2) \sum_k \left(\sqrt{k^2 + \mu_1^2} - \sqrt{k^2 + \mu_2^2} \right) (N_{k+} + N_{k-} + 1). \quad (21)$$

Это выражение для H всегда положительно. Таким образом, для частиц, которые являются квантами поля φ и числа которых с положительным и отрицательным зарядом равны N_{k+} и N_{k-} , соответственно, не возникает состояния с отрицательной энергией.

Что касается полей φ_1 и φ_2 , то они вводятся лишь как некоторые вспомогательные функции, и нет оснований приписывать определенный физический смысл каждому из них в отдельности, так как только их комбинация $\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}$ трактуется в данной теории как волновая

функция мезонов. При такой трактовке не имеет смысла сопоставлять, как это часто делается, каждому из полей φ_1 и φ_2 соответствующие частицы с положительной и отрицательной энергией и, тем более, говорить о возможности переходов этих частиц в состояния с отрицательной энергией. С формальной стороны такие переходы оказываются запрещенными условием симметрии функции φ . В самом деле, эти переходы нарушили бы равенства (20), что, в свою очередь, нарушило бы симметрию φ .

Условие симметрии φ относительно μ_1 и μ_2 эквивалентно определенному выбору начальных данных, и потому всегда выполнимо. Это условие, будучи выполнено в один какой-либо момент, выполняется во все последующие моменты времени и не нарушается при введении взаимодействия поля φ с его источниками. Последнее обстоятельство обусловлено симметрией функции Грина, соответствующей уравнению (1), и является весьма важным для применимости теории возмущений.

Наконец, следует отметить, что в задачах, в которых отсутствуют реальные мезоны (например в задаче о взаимодействии между нуклонами) до включения взаимодействия, т. е. до появления виртуальных мезонов, поле равно нулю. Решения же, возникающие вследствие наличия источников, симметричны относительно μ_1 и μ_2 . Поэтому условие симметрии функции φ в этих задачах выполняется автоматически.

В заключение выражаю глубокую благодарность Е. С. Фрадкину за ряд ценных указаний, а также Д. Д. Иваненко, И. М. Халатникову и В. И. Григорьеву за обсуждение результатов работы.

Львовский государственный
университет
им. И. Франко

Поступило
1 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Christian, E. Hart, Phys. Rev., **77**, 441 (1950). ² Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, ЖЭТФ, **14**, 379 (1944). ³ A. Pais, G. Uhlenberg, Phys. Rev., **79**, 145 (1950). ⁴ А. В. Гуревич, ЖЭТФ, **24**, 149 (1953). ⁵ В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.