

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. В. ХОХЛОВ

К ТЕОРИИ ЗАХВАТЫВАНИЯ ПРИ МАЛОЙ АМПЛИТУДЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 1 IV 1954)

Теории явлений, имеющих место при действии внешней синусоидальной силы на автоколебательные системы томсоновского типа, посвящено большое число работ. Однако, в силу больших математических трудностей, связанных с решениями нелинейных дифференциальных уравнений, ряд интересных особенностей явлений не поддавался до сих пор теоретическому объяснению.

Настоящая работа содержит изложение метода решения задач о действии малых внешних периодических сил на автоколебательные системы томсоновского типа. Изложение проведено на примере простейшей задачи из этой области — задачи о захватывании автоколебательной системы малой внешней синусоидальной силой.

Метод решения состоит в предварительной оценке порядка малости входящих в «укороченные» уравнения величин, разложении этих уравнений по малому параметру и решении уже упрощенных таким образом уравнений.

Пусть на ламповый генератор синусоидальных колебаний с контуром в цепи сетки действует внешняя эдс с частотой p , близкой к частоте свободных автоколебаний ω_0 . Тогда уравнение колебаний напряжения на конденсаторе x в контуре генератора имеет вид:

$$\ddot{x} - 2\delta_0(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = E\omega_0^2 \cos pt. \quad (1)$$

Здесь обозначения общеприняты. Если представить напряжение на конденсаторе в виде вынужденного колебания

$$x = A \sin(pt - \varphi), \quad (2)$$

то изменение со временем амплитуды A и фазы φ приближенно описывается укороченными уравнениями ^(1, 2)

$$\dot{A} = \delta(A) A + \frac{E\omega_0}{2} \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\dot{\varphi} = p - \omega_0 - \frac{E\omega_0}{2A} \sin \varphi. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) аппроксимируют исходное уравнение с точностью до членов порядка $(\delta/\omega_0)^2$. Эти уравнения не могут быть решены в квадратурах в общем случае. Однако для практически наиболее интересного случая, когда действующая сила имеет малую по сравнению с $\frac{\delta}{\omega_0} A_0$ амплитуду, где A_0 — амплитуда свободных автоколебаний, уравнения значительно упрощаются и решаются в общем виде.

Для сравнения малых величин разных порядков отметим малость амплитуды E в уравнениях (3) и (4) множителем — малым параметром μ , который в окончательных формулах можно положить равным

единице. Интересуясь расстройками, не слишком превышающими область захватывания, которая имеет порядок, согласно (4), $|p - \omega_0|_{\text{гр}} \simeq E\omega_0 / 2A_0$, отметим малость расстройки $p - \omega_0$ также множителем μ . Отсюда следует, что медленность изменения фазы со временем определяется величиной порядка μ , т. е. $\varphi = \varphi(\mu t)$.

При воздействии малой внешней силы изменение со временем амплитуды A определяется изменением фазы $(^2)$. Учитывая, кроме того, что амплитуда A отличается от амплитуды свободных автоколебаний A_0 на величину порядка μ , имеем

$$A = A_0 + \mu a(\mu t).$$

Подставляя в выражения для фазы и амплитуды вынужденных колебаний написанные значения и пренебрегая величинами, порядок которых μ^2 и выше, имеем для амплитуды $a(t)$:

$$a(t) = \frac{E\omega_0}{2A_0 \left| \frac{d\delta}{dA} \right|_{A=A_0}} \cos \varphi. \quad (5)$$

При этом изменение фазы колебаний определяется уравнением:

$$\dot{\varphi} = p - \omega_0 - \frac{E\omega_0}{2A_0} \sin \varphi. \quad (6)$$

Возможность разложения по параметру $\mu = E\omega_0 / A_0 \delta$ уравнений (3) и (4) определяется условием

$$\frac{E}{A_0} \ll \frac{\delta}{\omega_0}. \quad (7)$$

Возможность же описания движения системы под действием внешней силы уравнениями (3) и (4) определяется условием

$$\frac{E}{A_0} \gg \left(\frac{\delta}{\omega_0} \right)^2. \quad (8)$$

Таким образом, для описания движения системы уравнениями (5) и (6) необходимо одновременное выполнение условий (7) и (8).

Из (6) следует, что граница полосы захватывания в рассматриваемом случае определяется соотношением $|p - \omega_0| = E\omega_0 / 2A_0$.

Решение уравнения (6) может быть получено путем обращения интеграла (ср. с $(^2)$)

$$t = \int \frac{d\varphi}{p - \omega_0 - \frac{E\omega_0}{2A_0} \sin \varphi}. \quad (9)$$

Это обращение удобно провести для случаев $|p - \omega_0| > E\omega_0 / 2A_0$ и $|p - \omega_0| < E\omega_0 / 2A_0$ отдельно.

1. Случай $E\omega_0 / 2A_0 > |p - \omega_0|$ соответствует задаче об установлении режима захватывания при включении внешней силы. Имеем:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{k \operatorname{ch} \frac{k}{2} (t - t_0) - \left[\frac{E\omega_0}{2A_0} \mp (p - \omega_0) \right] \operatorname{sh} \frac{k}{2} (t - t_0)}{k \operatorname{ch} \frac{k}{2} (t - t_0) + \left[\frac{E\omega_0}{2A_0} \mp (p - \omega_0) \right] \operatorname{sh} \frac{k}{2} (t - t_0)}. \quad (10)$$

Здесь t_0 — константа, зависящая от начальной фазы $\tilde{\varphi}$,

$$k = \sqrt{\left(\frac{E\omega_0}{2A_0} \right)^2 - (p - \omega_0)^2}. \quad (11)$$

Верхний знак в (10) относится к случаю $\sin \tilde{\varphi} > \sin \varphi_0$, а нижний — к случаю $\sin \tilde{\varphi} < \sin \varphi_0$.

Из (10) видно, что с течением времени апериодически устанавливается фаза φ_0 , определяемая из соотношения

$$\sin \varphi_0 = \frac{2A_0(p - \omega_0)}{E\omega_0}. \quad (12)$$

Условие устойчивости указывает, что при этом $\cos \varphi_0 > 0$, т. е. внутри полосы захватывания амплитуда колебаний A больше A_0 . Время установления режима захватывания определяется величиной, обратной (11). По мере приближения к границе полосы захватывания это время при одних и тех же начальных условиях увеличивается.

II. Случай $E\omega_0/2A_0 < |p - \omega_0|$ соответствует режиму биений вне области захватывания. В этом случае

$$\cos \varphi = \frac{(1 - q^2) \cos \psi - q \sqrt{1 - q^2} \sin \psi}{1 + q^2 \cos \psi + q \sqrt{1 - q^2} \sin \psi}. \quad (13)$$

Здесь $q = \frac{E\omega_0}{2A_0|p - \omega_0|}$, $\psi = |p - \omega_0| \sqrt{1 - q^2} t$. Кроме того, в (13) принято, что фаза φ с течением времени увеличивается и для $p - \omega_0 > 0$, и для $p - \omega_0 < 0$. Из (13) видно, что $\cos \varphi$, а вместе с ним и форма биений, является периодической функцией времени с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(p - \omega_0)^2 - (E\omega_0/2A_0)^2}}. \quad (14)$$

Вдали от границы полосы захватывания форма биений является почти синусоидальной. По мере приближения частоты внешней силы к границе полосы захватывания форма биений искажается, приобретая характерный асимметричный вид — нарастание колебаний происходит быстрее, чем спад (3).

Проведенный анализ дает возможность вскрыть механизм захватывания при малой амплитуде внешней силы, на необходимость чего указывалось в литературе (4).

Вдали от области захватывания движение в системе состоит в первом приближении из вынужденных колебаний с частотой p и автоколебаний с частотой ω_0 , между которыми происходят биения. В результате этих биений «средняя крутизна» сеточной характеристики анодного тока периодически с частотой $|p - \omega_0|$ изменяет свою величину. Если частоты вынужденных колебаний и автоколебаний не очень близки друг к другу, то происходит усреднение «средней крутизны» по времени и устанавливается некоторая стационарная «средняя крутизна», тем меньшая, чем больше амплитуда вынужденных колебаний. Такое усреднение происходит по времени τ установления малых отклонений от стационарной амплитуды автоколебаний в отсутствие действия внешней эдс $\tau = \frac{1}{A_0 |d\delta/dA|_0}$ и законно лишь тогда, когда расстройка не очень мала.

При больших амплитудах внешней силы захватывание наступает при таких расстройках, при которых период биений меньше τ . Переход к режиму синхронизации происходит путем уменьшения глубины биений до нуля. Вынужденные колебания, амплитуда которых растет по мере приближения частоты p к частоте ω_0 , уменьшая «среднюю крутизну», подавляют автоколебания.

При малых амплитудах внешней силы, наоборот, даже вдали от области захватывания период биений становится больше τ . Усреднение, аналогичное вышеупомянутому, приведет к медленно меняющейся со временем «средней крутизне», что, в свою очередь, приведет к медленно меняющейся амплитуде автоколебаний. В результате такого самосогласованного воздействия на амплитуду автоколебаний форма

биений искажается — изменение амплитуды результирующего колебания перестает быть синусоидальным. Кроме того, это воздействие, эквивалентное введению в сеточный контур положительного и отрицательного сопротивлений в соответствующие части периода биений, замедляет изменение амплитуды результирующего колебания, что приводит к увеличению периода биений.

Для того чтобы представить порядок изменения периода биений, заметим, что, как следует из вышеизложенного форма биений в этом случае такая же, как и форма колебаний в нелинейном контуре, резонансная частота Ω которого $\Omega^2 = (p - \omega_0)^2$, а среднее значение переменного декремента затухания Δ равно нулю. Черта над Ω^2 означает усреднение по периоду. Основания для такой аналогии дают уравнения (5) и (6). В самом деле, форма биений определяется величиной $y = \cos \varphi$, изменение которой со временем описывается уравнением

$$\ddot{y} - 2 \frac{E\omega_0}{2A_0} y \dot{y} + \left[(p - \omega_0)^2 - (p - \omega_0) \frac{E\omega_0}{2A_0} \sqrt{1 - y^2} \right] y = 0. \quad (15)$$

Порядок периода колебаний нелинейного контура, а вместе с ним и порядок периода биений можно определить по формуле

$$T \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Delta}^2}} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{(p - \omega_0)^2 - \frac{1}{2} (E\omega_0/2A_0)^2}}. \quad (16)$$

Вдали от полосы захватывания, когда $|p - \omega_0| \gg E\omega_0/2A_0$, система, описываемая уравнением (15), является томсоновской и, следовательно, форма биений — синусоидальной. Частота биений P равна в этом случае $|p - \omega_0|$. По мере приближения к полосе захватывания период биений возрастает, а форма биений искажается, приближаясь к форме релаксационных колебаний. Следовательно, спектр колебаний вблизи полосы захватывания чрезвычайно богат гармониками $p \pm nP$, где n — целые числа. При расстройках, порядок которых $|p - \omega_0| \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{E\omega_0}{2A_0}$, период биений становится бесконечным. Это и характеризует переход к режиму синхронизации, который происходит, в отличие от случая больших амплитуд внешних сил, путем уменьшения частоты биений до нуля.

Таким образом, причиной захватывания при малой амплитуде внешней силы является замедление биений, происходящее благодаря сказывающейся в этом случае инерционности системы по отношению к приходящим через обратную связь воздействиям.

В заключение отметим, что изложенный метод может быть применен ко многим другим задачам теории действия малых внешних сил на автоколебательные системы томсоновского типа. К их числу относятся, например, задача о синхронизации гармонической силой с частотой $p \simeq \frac{m}{n} \omega_0$, задача о взаимной синхронизации двух генераторов и т. п.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, Киев, 1937. ² К. Ф. Теодорович, Автоколебательные системы, М., 1952.
³ П. А. Рязин, ЖТФ, 5, 1, 38 (1935); Techn. Phys. URSS, 2—3, 195 (1935).
⁴ Ю. Б. Кобзарев, ЖТФ, 5, 2, 216 (1935).