

ГИДРОМЕХАНИКА

М. Л. ЛИДОВ

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ
НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА С УЧЕТОМ СИЛ
НЬЮТОНОВСКОГО ТЯГОТЕНИЯ ***

(Представлено академиком Л. И. Седовым 10 V 1954)

1. Одномерные адиабатические неустановившиеся движения тяготеющей массы совершенного газа при наличии сферической симметрии можно описать при помощи системы уравнений

$$\rho = \frac{\rho_1 \xi^2}{(\xi + u)^2 (1 + \partial u / \partial \xi)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{1 + \partial u / \partial \xi} + \frac{4\pi f}{(\xi + u)^2} \int_0^\xi \xi^2 \rho_1 d\xi = 0, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_1}{\rho_1^\gamma}, \quad (1)$$

где t — время; ξ — координата частицы в начальный момент времени; $\rho(\xi, t)$ — плотность; $P(\xi, t)$ — давление; $u(\xi, t)$ — смещение частицы относительно начального положения; f — гравитационная постоянная; γ — показатель адиабаты; $P_1(\xi)$ и $\rho_1(\xi)$ — соответственно, давление и плотность частиц в начальный момент времени.

Если распределение давлений и плотностей в начальный момент времени связаны соотношением

$$P_1(\xi) = -\alpha \int \rho_1(\xi) \xi d\xi - 4\pi f \int \frac{\rho_1(\xi)}{\xi^2} d\xi \int_0^\xi \eta^2 \rho_1(\eta) d\eta + C, \quad (2)$$

где α и C — любые постоянные, то в случае $\gamma = 4/3$ система (1) имеет решение

$$u = (z(t) - 1)\xi; \quad \rho = \frac{\rho_1(\xi)}{z^3(t)}; \quad P = \frac{P_1(\xi)}{z^4(t)}, \quad (3)$$

причем $dz/dt = \pm \sqrt{c_1 - 2\alpha/z}$, где c_1 — произвольная постоянная.

Рассмотрим случаи: а) $c_1 = 0$; б) $c_1 = a^2 > 0$; в) $c_1 = -a^2 < 0$.

В случае а) $\alpha < 0$. Зависимость $z(\tau)$ имеет вид $z(\tau) = (3/2\tau)^{1/2}$, где $\tau = \sqrt{-2\alpha}(t - t_0)$.

В случае б) имеем:

$$\pm \tau = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+y} + y^{1/2}}{\sqrt{1+y} - y^{1/2}} \right| + y^{1/2} \sqrt{1+y}, \quad (4)$$

причем

$$\tau = -\frac{a^2}{2\alpha}(t - t_0), \quad z(\tau) = -\frac{2\alpha}{a^2} y(\tau). \quad (5)$$

Из (4) видно, что $y(\tau)$ может изменяться в пределах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

* Аналогичные точные решения без учета сил ньютоновского тяготения найдены и исследованы Л. И. Седовым (1).

Движение в случаях а) и б) представляет собой либо разлет частиц к бесконечности, либо фокусировку к центру симметрии.

В случае с) $\alpha < 0$; при обозначениях (5) имеем следующую периодическую зависимость $y(\tau)$:

$$\pm \tau = y^{1/2} \sqrt{1-y} + \arctg \frac{\sqrt{1-y}}{y^{1/2}}, \quad (6)$$

которая представлена на рис. 1.

Если за начальный момент принять состояние покоя, то параметры a и α будут связаны соотношениями: для случая б) ($y(\tau) < 0$) $2\alpha/a^2 = 1$, для случая с) $-2\alpha/a^2 = 1$.

Таким образом, мы можем получить решение задачи о движении, возникающем из состояния покоя в пустоте, тяготеющей сферической массы газа, если начальное распределение давлений и плотности удовлетворяет условию (2) и обращается в нуль на границе сферы. В случае с) происходят периодические пульсационные движения частиц от начального положения к центру симметрии с последующим разлетом к первоначальному положению.

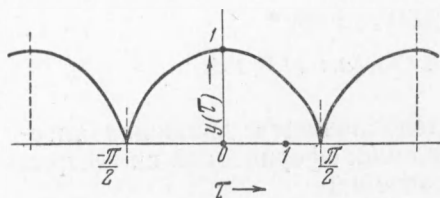


Рис. 1

Обозначим начальный радиус газовой сферы через r_0 . Тогда граничные частицы будут перемещаться по закону $r_2(t) = y(\tau) r_0$. В эйлеровых переменных решение этой задачи будет иметь вид:

$$v = a \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} r; \quad \rho = \frac{\rho_1(r/y(\tau))}{y^3(\tau)}; \quad P = \frac{P_1(r/y(\tau))}{y^4(\tau)},$$

где v — скорость частицы, r — расстояние от центра симметрии.

Рассмотрим в качестве примера начальное распределение плотности по линейному закону:

$$\rho_1(\xi) = \rho_0 \left(1 - \frac{\xi}{r_0}\right);$$

формула (4) и граничное условие дают следующие выражения для $P_1(\xi)$ и для значения постоянной α :

$$P_1(\xi) = P_0 - \frac{\pi f \rho_0^2}{4r_0^2} \xi^4 + \left(\frac{2P_0}{r_0^3} + \frac{1}{2} \frac{\pi f \rho_0^2}{r_0}\right) \xi^3 - \xi^2 \left(\frac{3P_0}{r_0^2} + \frac{1}{4} \pi f \rho_0^2\right),$$

$$\alpha = \frac{6}{r_0^2} \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{5}{6} \pi f \rho_0,$$

где ρ_0 и P_0 — плотность и давление в центре симметрии.

Для периода пульсаций T получается формула

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{5}{3} \pi f \rho_0 - 12 \frac{P_0}{r_0^2} \rho_0}}.$$

Задаваемые заранее значения P_0 , ρ_0 и r_0 должны удовлетворять условию $P_1(\xi) > 0$ и $\alpha < 0$.

2. Если γ произвольно, то система уравнений (1) имеет решение:

$$u = (z(t) - 1) \xi; \quad \rho = \frac{A}{z^3(t)}; \quad P = \frac{B\xi^2 + C}{z^{3\gamma}(t)},$$

причем $z''(t) z^2(t) + \frac{2B}{A} z^{4-3\gamma} + \frac{4\pi f}{3} A = 0$, где A , B , C — любые постоянные.

Поступило
7 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. И. Седов, ДАН, 90, № 5 (1953).