

И. С. АРЖАНЫХ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 4 V 1954)

Уравнения движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой обладают некоторыми характерными аналитическими свойствами, которые позволяют интерпретировать движение тела движением материальной точки. Ниже указаны две интерпретации: 1) движение тела можно заменить движением материальной точки по поверхности эллипсоида инерции под действием потенциальных и гироскопических сил; 2) движение тела можно заменить движением наэлектризованной частицы под действием плоского электрического поля и перпендикулярного магнитного поля. Движение точки во втором случае происходит в плоскости. Это создает благоприятные условия для экспериментального построения траекторий наэлектризованной частицы, движение которой интерпретирует зависимость между углами нутации и собственного вращения.

Следствием этих новых интерпретаций является указанный ниже вывод о существовании линейного интеграла, отличного от интеграла момента количества движения вокруг вертикали. Последний вывод является принципиально важным в свете исследований ^(1, 2) о новом интеграле дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи.

Пусть f и h — постоянные классических интегралов, соответственно, момента количества движения и энергии; $A > B > C$ — моменты инерции относительно осей, неподвижных в теле; a, b, c — координаты центра тяжести относительно тех же осей и P — вес тела.

Теорема 1. Если заменить время по формуле $dt = ABCD d\sigma$, где $\sqrt{D}$ — расстояние от неподвижной точки до касательной плоскости эллипсоида инерции

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1, \quad (1)$$

и выполнить подстановку

$$\varphi = \arctg \left(\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\xi}{\eta} \right), \quad \theta = \arccos(\sqrt{C}\zeta), \quad (2)$$

то дифференциальные уравнения вращения тяжелого твердого тела примут вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\sigma^2} = \text{grad } U - f \left[\text{rot } \mathbf{G}, \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right], \quad (3)$$

где $\mathbf{r} = i\xi + j\eta + k\zeta$,

$$U = ABCD [h + P(a\sqrt{A}\xi + b\sqrt{B}\eta + c\sqrt{C}\zeta) - N(A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 1)],$$

$$\mathbf{G} = \frac{DV\overline{ABC}}{A\xi^2 + B\eta^2} [iC\eta\zeta - jC\xi\zeta - k(A - B)\xi\eta]. \quad (4)$$

Уравнения (1) и (3) определяют движение механической системы с кинетическим потенциалом

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right)^2 + f \left(\mathbf{G}, \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) + U \quad (5)$$

при наличии связи (1), т. е. согласно этим уравнениям рассматриваемая задача приводится к изучению движения материальной точки по поверхности эллипсоида инерции под действием потенциальных и гироскопических сил.

Для доказательства преобразуем уравнения Лагранжа, записанные через углы Эйлера, методом Рауса при помощи циклического интеграла

$$A\alpha(\dot{\psi}\alpha + \dot{\theta}\cos\varphi) + B\beta(\dot{\psi}\beta - \dot{\theta}\sin\varphi) + C\gamma(\dot{\psi}\gamma + \dot{\varphi}) = f; \quad (6)$$

$$\alpha = \sin\theta\sin\varphi, \quad \beta = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma = \cos\theta.$$

В данном случае функция Рауса будет $R = R_2 + R_1 + R_0$,

$$R_2 = \frac{1}{2} D \left\{ \dot{\varphi}^2 C (A\alpha^2 + B\beta^2) - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} C\gamma (A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi) + \right. \\ \left. + \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{D} (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi) - (A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi)^2 \right] \right\}; \quad (7)$$

$$R_1 = fD [\dot{\varphi}C\gamma + \dot{\theta} (A\alpha\cos\varphi - B\beta\sin\varphi)]; \quad (8)$$

$$R_0 = P(a\alpha + b\beta + c\gamma) - \frac{1}{2} f^2 D; \quad (9)$$

$$\frac{1}{D} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Выполним замену переменных (2) при условии (1). Тогда, как легко видеть, будем иметь:

$$R_2 = \frac{1}{2} ABCD (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2); \quad (10)$$

$$R_1 = \frac{fDV\overline{ABC}}{A\dot{\xi}^2 + B\dot{\eta}^2} [\dot{\xi}C\gamma\dot{\zeta} - \dot{\eta}C\dot{\xi}\dot{\zeta} - \dot{\zeta}(A - B)\xi\eta]; \quad (11)$$

$$R_0 = P(a\sqrt{A}\xi + b\sqrt{B}\eta + c\sqrt{C}\zeta) - \frac{1}{2} f^2 D; \quad (12)$$

$$\frac{1}{D} A^2\dot{\xi}^2 + B^2\dot{\eta}^2 + C^2\dot{\zeta}^2. \quad (13)$$

Следовательно, уравнения движения представляются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad (14)$$

$$L = R - N(t)(A\dot{\xi}^2 + B\dot{\eta}^2 + C\dot{\zeta}^2 - 1),$$

где N — множитель связи (1). Выполнив замену времени по указанной формуле, получим уравнения движения (3).

Теорема 2. Если выполнить замену переменных

$$\xi = \frac{k}{VA} \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v, \quad \eta = \frac{ik}{k'VB} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v, \quad \zeta = \frac{1}{k'VC} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v, \quad (15)$$

определив эллиптические функции Якоби по модулю k ($k' = \sqrt{1 - k^2}$, $i^2 = -1$)

$$k^2 = \frac{(A - B)C}{(A - C)B} < 1, \quad (16)$$

и ввести новые переменные по формулам

$$x = \int_0^u \sqrt{A \operatorname{sn}^2 u + B \operatorname{cn}^2 u} du, \quad y = i \int_0^v \sqrt{A \operatorname{sn}^2 v + B \operatorname{cn}^2 v} dv, \quad (17)$$

то уравнения вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки после замены времени по формуле

$$dt = \frac{C (kk')^2}{\Lambda(u, v)} (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v) d\tau, \quad (18)$$

$$\Lambda = A (kk')^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v - B k^2 \operatorname{cn}^2 u \operatorname{cn}^2 v + C \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v, \quad (19)$$

будут иметь вид

$$x'' = V_x - f\Omega y', \quad y'' = V_y + f\Omega x', \quad (20)$$

где

$$V = \frac{C (kk')^2}{\Lambda(u, v)} (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v) \left[h - \frac{1}{2} \frac{(fk')^2}{\Lambda(u, v)} + \right. \\ \left. + P \left(ak \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v + \frac{bik}{k'} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v + \frac{c}{k'} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \right) \right], \quad (21)$$

$$\Omega = \frac{(kk')^2}{\mu(u) \mu(v)} \left[\nu(v) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda(u)}{\Lambda M} \right) + \nu(u) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda(v)}{\Lambda M} \right) \right], \quad (22)$$

причем $\lambda(u) = \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$, $\mu(u) = \sqrt{A \operatorname{sn}^2 u + B \operatorname{cn}^2 u}$,

$$\nu(u) = C \operatorname{dn}^2 u + k^2 (A - B) \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u, \quad (23)$$

$$M(u, v) = k'^2 - \operatorname{dn}^2 u \operatorname{dn}^2 v.$$

В самом деле, как легко видеть, метрика на эллипсоиде (1) при помощи подстановки (15) приводится к виду

$$ds^2 = \frac{k^2}{AB} (\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v) (\mu^2(u) du^2 - \mu^2(v) dv^2), \quad (24)$$

т. е. координаты u, v для нашей системы являются изотермическими.

Замечание. Указанный переход от углов Эйлера к переменным x, y связан с обращением интегралов (17) с последующими вычислениями по формулам

$$\varphi = \arctg \left(\frac{k' \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}{i \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v} \right), \quad \theta = \arccos \left(\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{k'} \right). \quad (25)$$

На основании теории эллиптических функций ⁽³⁾ легко доказать, что переменные x, y являются вещественными, а при помощи интеграла энергии

$$\frac{1}{2} [(x')^2 + (y')^2] = V \quad (26)$$

определяем область их изменения $V \geq 0$.

Таким образом, указанная в начале электромагнитная интерпретация рассматриваемой задачи действительно может быть реально осуществлена.

Теорема 3. *Задача движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки допускает новый линейный интеграл.*

Действительно, в работе ⁽⁴⁾ было показано, что уравнения типа (20) всегда допускают линейный интеграл. Совершенно ясно, что этот интеграл не совпадает с классическим.

Уравнения (20) представляют интерес с точки зрения всевозможных качественных исследований движения тела, например в теории устойчивости по Якоби — Степанову.

Кроме того, можно искать решения в виде сходящихся рядов Пуанкаре — Ляпунова, принимая за параметр постоянную f :

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f^n x_n, \quad y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f^n y_n. \quad (27)$$

Сходимость этих рядов (и правило вычисления функций $x_n, y_n, n = 1, 2, \dots$) вытекает из теоремы Пуанкаре (⁵, ⁶). В соответствии с этим вопрос об интеграции уравнений (20) при $f = 0$ приобретает существенное значение.

Среднеазиатский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
29 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Я. Полубаринова-Кочина, Сборн. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки, Изд. АН СССР, 1940. ² В. В. Голубев, Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953. ³ Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, М., 1934. ⁴ И. С. Аржаных, ДАН, 96, № 1 (1954). ⁵ В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950. ⁶ И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, М., 1949.