

М. С. ЛИВШИЦ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ. I.

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 V 1954)

1. В настоящей работе мы находим в l_2 общий вид оператора энергии H_p , удовлетворяющего следующим условиям:

1. Матрица H_p эрмитова, линейна относительно p ($p > 0$) и имеет вид

$$H_p = H_0 + cpJ_0, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где H_0 — ограниченный эрмитов оператор, а c — положительная постоянная величина.

II. Матрица H_p для каждого значения $p > 0$ имеет одно и только одно собственное число E_p (уровень энергии), причем

$$E_p = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}. \quad (2)$$

Доказывается, что если матрица H_p удовлетворяет условиям I и II, то она унитарно эквивалентна (при условии простоты спектра H_p) матрице $mc^2 T + cpJ_0$, где T — матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} 0 & V^{1/2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ V^{1/2} & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

Таким образом, матрица H_0 , играющая роль „энергии покоя“, унитарно эквивалентна матрице $mc^2 T$, спектр которой, как будет показано, непрерывен и заполняет интервал $[-mc^2, mc^2]$.

Матрицу T , входящую в равенство (3), мы будем называть матрицей Чебышева, так как полиномы Чебышева

$$T_0(\lambda) = 1, \quad T_n(\lambda) = \sqrt{2} \cos(n \arccos \lambda) \quad (n \geq 1),$$

образующие ортонормированную систему по отношению к весу $q(\lambda) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\lambda^2}}$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$), удовлетворяют, как известно, рекуррентным соотношениям $T_1(\lambda) = \sqrt{2} \lambda T_0$, $T_2(\lambda) = 2\lambda T_1(\lambda) - \sqrt{2} T_0(\lambda)$, $T_n(\lambda) = 2\lambda T_{n-1}(\lambda) - T_{n-2}(\lambda)$ ($n \geq 3$), эквивалентным уравнению

$$Tf_\lambda = \lambda f_\lambda \quad (-1 \leq \lambda \leq 1), \quad (4)$$

где $f_\lambda = (T_0(\lambda), T_1(\lambda), \dots)$.

* Соотношение (2) выражает известную в релятивистской механике связь между энергией и импульсом частицы.

2. Пусть H_0 — ограниченная эрмитова матрица и $H_p = H_0 + pJ_0$. Имеет место соотношение

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{1 + p\varphi_0(\lambda)} \quad (\text{Im } \lambda \neq 0), \quad (5)$$

где $\varphi_p(\lambda) = ((H_p - \lambda I)^{-1}\psi_0, \psi_0)$, $\psi_0 = (1, 0, 0, \dots)$.

В самом деле, полагая $u = (H_p - \lambda I)^{-1}\psi_0$, будем иметь $(H_0 - \lambda I)u + p(u, \psi_0)\psi_0 = \psi_0$, $u = [1 - p(u, \psi_0)](H_0 - \lambda I)^{-1}\psi_0$.

Умножая обе части последнего равенства скалярно на ψ_0 , мы получим равенство $\varphi_p(\lambda) = (1 - p\varphi_p(\lambda))\varphi_0(\lambda)$, из которого следует формула (5).

Пусть теперь A — некоторая матрица Якоби, т. е. матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (-\infty < a_k < \infty, b_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Известно ⁽¹⁾, что каждой ограниченной ($|a_k|$ и b_k ограничены в совокупности) матрице Якоби можно поставить в соответствие систему полиномов $P_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и неубывающую функцию $\rho_A(\lambda)$ ($a \leq \lambda \leq b$) так, чтобы выполнялись соотношения

$$\lambda P_k(\lambda) = b_k P_{k+1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_{k-1} P_{k-1}(\lambda) \quad (k \geq 1);$$

$$P_{-1}(\lambda) = 0 \quad P_0(\lambda) = 1;$$

$$\int_a^b P_j(\lambda) P_k(\lambda) d\rho_A(\lambda) = \delta_{kj} \quad (k, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Элементы матрицы A однозначно определяются функцией $\rho_A(\lambda)$ по формулам

$$a_{jk} = \int_a^b t P_j(t) P_k(t) d\rho_A(t). \quad (6)$$

Кроме того имеет место соотношение

$$((A - \lambda)^{-1}\psi_0, \psi_0) = \int_a^b \frac{d\rho_A(t)}{t - \lambda} \quad (\lambda \in [a, b]). \quad (7)$$

Спектр матрицы A совпадает с множеством точек роста функции $\rho_A(\lambda)$ ($a \leq \lambda \leq b$), причем собственным числам матрицы A соответствуют точки разрыва функции $\rho_A(\lambda)$.

3. В случае матрицы Чебышева $A = T$ полиномы $P_k(\lambda) = T_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), производная $\rho'_T(\lambda) = \frac{1}{\pi V 1 - \lambda^2}$ ($-1 \leq \lambda \leq 1$), а функ-

ция $\varphi_0^{(T)}(\lambda) = ((T - \lambda I)^{-1}\psi_0, \psi_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t - \lambda) V 1 - t^2} = - \frac{1}{V \lambda^2 - 1}$

(sign $\text{Im} V \lambda^2 - 1 = \text{sign } \text{Im } \lambda$).

Покажем, что матрица $H_p = mc^2 T + cpJ_0$ ($p > 0$) имеет одно и только одно собственное число $E_p = c V m^2 c^2 + p^2$. Без ограничения общности можно принять, что $m = c = 1$. Воспользовавшись формулой (5) и равенством $\varphi_0^{(T)}(\lambda) = - \frac{1}{V \lambda^2 - 1}$, мы получим для $\varphi_p(\lambda) = ((H_p - \lambda I)^{-1}\psi_0, \psi_0)$ выражение

$$\varphi_p(\lambda) = \frac{1}{p - V \lambda^2 - 1} \quad (\lambda \in [-1, 1]). \quad (8)$$

Формула обращения Стилтеса показывает следующее:

$$1) \rho'_p(t) = 0 \quad \text{при } t \neq \sqrt{1+p^2} \text{ и } t \in [-1, 1];$$

$$2) \rho'_p(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi(p^2+1-t^2)} > 0 \quad \text{при } -1 < t < 1.$$

Кроме того нетрудно показать, что

$$\rho_p(\lambda_p + 0) - \rho_p(\lambda_p - 0) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

где $\lambda_p = \sqrt{1+p^2}$.

Из вышеприведенных соотношений вытекает, что матрица $H_p = mc^2T + cpJ_0$ удовлетворяет условию II и что непрерывный спектр этой матрицы совпадает с сегментом $[-mc^2, mc^2]$.

Собственный вектор $l_p = (x_0(p), x_1(p), \dots)$ можно найти, решая систему уравнений

$$px_0(p) + \sqrt{1/2} x_1(p) = \sqrt{1+p^2} x_0(p),$$

$$\sqrt{1/2} x_0(p) + 1/2 x_2(p) = \sqrt{1+p^2} x_1(p),$$

$$1/2 x_1(p) + 1/2 x_3(p) = \sqrt{1+p^2} x_2(p),$$

.....

$$(m=c=1, \quad x_0(p)=1, \quad p>0).$$

Полагая $p = \operatorname{sh} \xi$, мы получим для l_p выражение

$$l_p = (1, \sqrt{2} e^{-\xi}, \sqrt{2} e^{-2\xi}, \dots) = (1, \sqrt{2} (E_p - p), \sqrt{2} (E_p - p)^2, \dots).$$

4. Имеет место следующая теорема:

Если H_p ($p>0$) — матрица, удовлетворяющая условиям I и II, то H_p унитарно эквивалентна матрице вида

$$\begin{pmatrix} mc^2T + cpJ_0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где C — эрмитова матрица, не зависящая от p .

Для доказательства рассмотрим инвариантное относительно H_p ($p>0$) подпространство $\mathcal{H}_0$, образованное линейной замкнутой оболочкой векторов $H_0^n \psi_0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Пусть $P_k(\lambda)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) — ортонормированная система полиномов по отношению к нагрузке $p_0(\lambda) = (E_\lambda \psi_0, \psi_0)$ ($a \leq \lambda \leq b$), где E_λ — спектральная функция оператора H_0 . Выбирая новый ортонормированный базис $\psi_k = P_k(H_0) \psi_0$ ($k=0, 1, 2, \dots$), мы приведем (I) матрицу H_0 к якобиевой форме.

Как известно, добавление вполне непрерывного оператора не меняет точек сгущения спектра ⁽¹⁾, и отсюда следует, что собственное значение $E_p = \sqrt{1+p^2}$ ($p > \sqrt{\|H_0\|^2 - 1}$) не может принадлежать непрерывному спектру оператора H_p . Являясь единственным полюсом функции $\varphi_p(\lambda) = \frac{\varphi_0(\lambda)}{1+p\varphi_0(\lambda)}$, число E_p удовлетворяет уравнению

$1+p\varphi_0(E_p)=0$. Таким образом, $\varphi_0(\lambda) \equiv -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}$. Последнее выражение совпадает с найденным ранее выражением $\varphi_0^{(T)}(\lambda)$ для матрицы Чебышева.

Из равенства функций $\varphi_0(\lambda)$ и $\varphi_0^{(T)}(\lambda)$ следует, что $\rho_0(\lambda) = \rho_T(\lambda)$ и $H_0 = T$ на подпространстве $\mathcal{H}_0$.

Отметим еще, что из формулы $\varphi_p(\lambda) = \frac{1}{p - \sqrt{\lambda^2 - 1}}$ следует, что оператор H_p при $p < 0$ имеет единственное собственное число $E_p = -c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$.

Если дополнительно потребовать, чтобы матрица H_p ($-\infty < p < +\infty$) имела простой спектр, то $\mathcal{H}_0$ будет совпадать со всем пространством.

Одесский гидрометеорологический
институт

Поступило
7 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, М.—Л., 1947.