

О. А. ЛАДЫЖЕНСКАЯ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 IV 1954)

Мы рассмотрим два типа задач:

1) Определение решения в конечной области Q для параболического уравнения

$$L_1 u \equiv u_t - Lu = f, \quad (1)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

невыврожденный эллиптический оператор, при условиях

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и одном из граничных условий

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

или

$$\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j) + \sigma u \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

2) Определение решения гиперболического уравнения

$$L_2 u \equiv u_{tt} - Lu = f \quad (5)$$

при условиях

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

и одном из граничных условий (3) или (4).

Весьма простым рассуждением докажем, что все эти задачи при определенных предположениях о коэффициентах L однозначно разрешимы (в смысле, указываемом ниже) для любой функции f из $L_2(Q)$. При этом не будет использован никакой аппарат для представления решений.

Мы проведем все рассуждения для простейших представителей указанных выше типов — уравнения теплопроводности и волнового, однако доказательство построим так, чтобы оно без каких-либо существенных изменений было применимо и для уравнений общего вида.

Итак, рассмотрим сначала задачу (2), (3) для уравнения

$$L_1 u \equiv u_t - \Delta u = f \quad (1')$$

в цилиндре $Q = \Omega \times [0, T]$.

Возьмем в качестве основного гильбертова пространства пространство $L_2(Q)$. Обозначим через S оператор L_1 , определенный на функциях, имеющих непрерывные производные в $\bar{Q}$ первого порядка по t

и второго по x_i и удовлетворяющих условиям (2) и (3). Область определения S обозначим через $D(S)$, а область значений $R(S)$.

В нашей заметке ⁽¹⁾ установлено, что если граница Γ области Ω достаточно гладкая (имеет ограниченные вторые производные), то для всех функций v из $W_2^2(\Omega)$ ⁽²⁾, удовлетворяющих условиям (3), имеет место неравенство

$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \equiv \left[\int_{\Omega} \left(v^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 \right) d\Omega \right]^{1/2} \leq c \|\Delta v\|_{L_2(\Omega)} \equiv c \left[\int_{\Omega} (\Delta v)^2 d\Omega \right]^{1/2}, \quad (7)$$

и оператор Δ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством таких функций v и множеством $L_2(\Omega)$.

Покажем, что для функции $u \in D(S)$ справедливо неравенство

$$\int_Q \left(u^2 + u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right) d\Omega dt \leq c_1 \|L_1 u\|_{L_2(Q)}^2. \quad (8)$$

Действительно, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_P (L_1 u \cdot L_1 u) d\Omega dt &= \int_Q [u_t^2 - 2u_t \Delta u + (\Delta u)^2] d\Omega dt = \\ &= \int_Q \left[u_t^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^2)_t + (\Delta u)^2 \right] d\Omega dt. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство (7), получим желаемое.

Обозначим через $\bar{S}$ замыкание оператора S . В силу (8) $R(\bar{S})$ будет замкнутым подпространством $L_2(Q)$ и $R(\bar{S}) = \overline{R(S)}$. Мы докажем, что уравнение

$$\bar{S}u = f \quad (9)$$

однозначно разрешимо для любой $f \in L_2(Q)$. Для этого достаточно доказать, что в $L_2(Q)$ нет элемента, ортогонального $R(\bar{S})$ или, что то же, $R(S)$.

Лемма 1. Если для какого-либо элемента $v \in L_2(Q)$

$$\int_Q L_1 u \cdot v d\Omega dt = 0 \quad (10)$$

для всех $u \in D(\bar{S})$, то $v \equiv 0$.

Доказательство. Построим по функции v функцию φ так:

$$\Delta \varphi(x, t) = \int_T^t v(x, t) dt; \quad \varphi|_{\Gamma} = 0; \quad 0 \leq t \leq T.$$

В силу сказанного выше (см. (7)) $\varphi(x, t)$ есть элемент $W_2^2(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0, T]$, так что φ_{x_i} и $\varphi_{x_i x_j}$ принадлежат $L_2(Q)$.

В качестве u возьмем функцию

$$u(x, t) = 0 \text{ для } t \in [0, t_0]; \quad u(x, t) = \int_{t_0}^t \varphi(x, t) dt \text{ для } t \in [t_0, T].$$

Тогда (10) дает

$$0 = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \left[\varphi - \int_{t_0}^t \Delta \varphi dt \right] \Delta \varphi_t d\Omega dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\varphi|_{\Gamma} = 0$ и $\varphi|_{t=T} = 0$, получим

$$0 = - \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2 - (\Delta \varphi)^2 \right] d\Omega dt - \int_{\Omega} \Delta \varphi \left(\int_{t_0}^t \Delta \varphi dt \right) d\Omega \Big|_{t=t_0}^{t=T} = \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2(x, t_0) d\Omega + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\Omega dt.$$

Отсюда заключаем, что $\Delta \varphi = 0$, а следовательно, и $v = \Delta \varphi_t = 0$, и т. д.

Итак, мы доказали, что оператор S устанавливает взаимно-однозначное (см. (8)) соответствие между функциями из $D(\bar{S})$ и функциями из $L_2(Q)$. Множество $D(\bar{S})$ состоит из всех функций u , квадратично суммируемых по Q вместе со своими обобщенными производными вида u_t , u_{x_i} и $u_{x_i x_j}$ и удовлетворяющих условиям (2) и (3). Оператор L_1 на $u \in D(\bar{S})$ вычисляется обычным образом.

Такой же результат имеет место и для общих параболических уравнений (1) при условиях (2) и (3) или (4).

Действительно, неравенство, аналогичное (7), установлено нами (1) для общих эллиптических операторов вида L при условиях (2) или (3); неравенство (8) выводится из него непосредственно. Наконец, доказательство леммы 1 проводится по тому же плану, лишь несколько усложняются преобразования вследствие зависимости коэффициентов L от t и x_i . Несущественные осложнения приносит и тот случай, когда коэффициент $c(x, t)$ неотрицателен, а функция σ неположительна. Нетрудно видеть, что указанный подход дает возможность аналогично рассмотреть ряд операторных уравнений.

Переходим к уравнениям гиперболического типа. Проведем все доказательства на примере простейшего представителя этих уравнений — волновом уравнении

$$L_2 \equiv u_{tt} - \Delta u = f \quad (5')$$

при условиях (6) и (2).

Обозначим через S оператор L_2 , рассматриваемый на функциях из $W_2^2(Q)$, удовлетворяющих условиям (6) и (2).

Для функций из $D(\bar{S})$ справедливо известное энергетическое неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|f\|_{L_2(Q)}. \quad (11)$$

Оно же будет справедливо и для функций из $D(\bar{S})$. В силу (11) $R(\bar{S})$ будет замкнутым подпространством $L_2(Q)$. Для доказательства однозначной разрешимости уравнения

$$\bar{S}u = f$$

при любой $f \in L_2(Q)$ достаточно доказать лемму:

Лемма 2. Если для какого-либо элемента v из $L_2(Q)$

$$\int_Q L_2 u \cdot v d\Omega dt = 0 \quad (12)$$

для всех $u \in D(S)$, то $v \equiv 0$.

Доказательство. Построим по v функцию φ так же, как и в лемме 1. В качестве же функции u в (12) подставим следующую:

$$u(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad u(x, t) = \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} \varphi(x, \eta) d\eta, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Функция $u \in D(S)$. Равенство (12) запишется тогда в виде

$$0 = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \left(\varphi - \int_{t_0}^t d\tau \int_{t_0}^{\tau} \Delta \varphi(x, \eta) d\eta \right) \Delta \varphi_t(x, t) d\Omega dt.$$

Интегрирование по частям с учетом $\varphi|_{\Gamma} = 0$ и $\varphi|_{t=T} = 0$ дает

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2(x, t_0) d\Omega + \int_{t_0}^T \int_{\Omega} \Delta \varphi(x, t) \left(\int_{t_0}^t \Delta \varphi(x, \eta) d\eta \right) d\Omega dt = 0.$$

Обозначая $\int_{t_0}^t \varphi(x, \eta) d\eta = w(x, t)$ и интегрируя в последнем интеграле по t , получим:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2(x, t_0) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta w(x, T))^2 d\Omega = 0.$$

Отсюда заключаем, что $\varphi_{x_i} = 0$, а следовательно, и $v = \Delta \varphi_t = 0$, ч. т. д.

Функция $u \in D(\bar{S})$, являющаяся решением операторного уравнения $\bar{S}u = f$, $f \in L_2(Q)$, будет так называемое обобщенное решение смешанной задачи (5), (2) и (3) в смысле, определенном в (2).

Приведенное для уравнения (5') доказательство без каких-либо существенных изменений переносится на общие гиперболические уравнения (5) с условиями (2), (3) (или (4)), на систему уравнений теории упругости, а также на целый ряд операторных уравнений.

Ленинградский
государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
22 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. А. Ладыженская, ДАН, 79, № 5 (1951). ² О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., 1953.