

П. П. КУФАРЕВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ ЗАДАЧИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 V 1954)

Известно, что функция $z = f(w)$, доставляющая максимум функционалу

$$L(\varphi) = \operatorname{Re} \{\varphi\}_n, \quad \{\varphi\}_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}, \quad (1)$$

в классе функций

$$\varphi(w) = w + c_2 w^2 + \dots + c_n w^n + \dots, \quad (2)$$

голоморфных и однолистных в круге $|w| < 1$, отображает $|w| < 1$ на область B , получаемую из плоскости z проведением разрезов по конечному числу аналитических кривых без кратных конечных точек ⁽¹⁾. Доказательство этого основывается на том, что $f(w)$ удовлетворяет определенному дифференциальному уравнению вида ⁽¹⁾

$$\left(\frac{w}{f} \frac{df}{dw} \right)^2 = \frac{B(w)}{A(f)}. \quad (3)$$

В данной статье доказывается следующая более общая теорема:

Пусть $C_{z_0}(\tau)$ — произвольная дуга границы Γ экстремальной области B , соединяющая точки z_0 и $z(\tau)$, и $G_{z_0}(\tau)$ — область, получаемая из плоскости проведением разреза по $C_{z_0}(\tau)$. Функция $w = F(z, \tau)$, $F(0, \tau) = 0$, $F_2(0, \tau) = e^{\tau*}$, отображающая $G_{z_0}(\tau)$ на $|w| < 1$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{z}{F} \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 = \frac{A(z)}{B(F, \tau)}, \quad (4)$$

где

$$A(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{z^k}, \quad A_k = \{[f(w)]^{k+1}\}_n, \quad (5)$$

$$B(F, \tau) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k F^{-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \bar{b}_k F^k + \frac{1}{2} (b_0 - \bar{b}_0) - \frac{1}{2} (A_0 + \bar{A}_0) + \\ + \frac{w_0 (F + w_0)}{2d (F - w_0)} A_1 - \frac{\bar{w}_0 (1 + F \bar{w}_0)}{2\bar{d} (1 - F \bar{w}_0)} \bar{A}_1, \quad (6)$$

* Выбор параметра τ .

$$b_k = \left\{ \frac{F(f(w), \tau)}{F'_2(f(w), \tau)} \right\}_n \quad (b_{n-1} = e^{(n-1)\tau}),$$

$$w_0 = F(\infty, \tau),$$

$$d = \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z, \tau) - w_0)^*.$$

§ 1. Формула Г. М. Голузина. Пусть $\zeta = \zeta(w)$, $\zeta(0) = 0$, $\zeta'(0) > 0$, голоморфна и однолистка в $|w| < 1$ и $\zeta(w) + \operatorname{tg}(w)$ голоморфна и однолистка (при $0 < t < t_0$) в кольце $r < |w| < 1$, $0 < r < 1$, и отображает это кольцо на область, ограниченную континуумами D_1^t и D_r^t . Функция, отображающая $|w| < 1$ на односвязную область, граница которой есть D_1^t , представима в $|w| < \rho$, $r < \rho < 1$, в виде:

$$\zeta^* = \Phi(w, t) = \zeta(w) + t w \zeta'(w) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=\rho} \operatorname{Re} \frac{q(\omega)}{\omega \zeta'(\omega)} \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} + o(t). \quad (8)$$

Эта формула легко следует из уравнения (102) работы (2) и лишь на константу отличается от формулы Г. М. Голузина (см. (1), стр. 63).

В частности, полагая

$$q(w) = A \frac{\zeta^2(w)}{\zeta(w) - \zeta(a)} = A \frac{\zeta^2}{\zeta - \zeta(a)}, \quad |a| < 1, \quad (9)$$

после вычислений находим:

$$\begin{aligned} \zeta^* = \zeta + t \left\{ A \frac{\zeta^2}{\zeta - \zeta(a)} - w \zeta'(w) \left[A \left(\frac{\zeta(a)}{a \zeta'(a)} \right)^2 \frac{a}{w - a} - \overline{A \left(\frac{\zeta(a)}{a \zeta'(a)} \right)^2} \frac{\bar{a} w}{1 - \bar{a} w} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} w \zeta'(w) \left[\overline{A \left(\frac{\zeta(a)}{a \zeta'(a)} \right)^2} - A \left(\frac{\zeta(a)}{a \zeta'(a)} \right)^2 \right] \right\} + o(t). \end{aligned} \quad (10)$$

§ 2. Отобразим область $G_{z_0}(\tau)$ на область плоскости ζ , не содержащую точки $\zeta = \infty$ **, функцией

$$\zeta = \frac{z_0 z}{z_0 - z}; \quad (11)$$

полагая $z = F^{-1}(w, \tau)$, проварьируем $\zeta(w)$ по формуле (10) и перейдем вновь в плоскость z при помощи преобразования

$$\zeta^* = \frac{z_0^* z^*}{z_0^* - z^*}, \quad (12)$$

$$z_0^* = -\zeta^*(w_0).$$

Заменяя в получающемся из (10) — (12) выражении для $z^*(w)$ w на $F(z, \tau)$ и $z'(w)$ на $[F'_z(z, \tau)]^{-1}$, получим формулу для функции $z^*(z)$, отображающей $G_{z_0}(\tau)$ на близкую к ней область G^* с сохранением точек $z = 0$ и $z = \infty$. Полагая в этой формуле $z = f(w)$, находим после вычислений для функции $Z = \tilde{f}(w)$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}'(0) = 1$, отображающей $|w| < 1$ на близкую к экстремальной области B область $\tilde{B}$, выражение:

* Теорема имеет место, в определенном смысле, не только для задачи коэффициентов, но и для ряда других экстремальных задач теории однолистных функций.

Если $C_{z_0}(\tau) \ni z = \infty$, то последние два слагаемых в выражении $B(F, \tau)$ надо отбросить.

** Если $C_{z_0}(\tau) \ni z = \infty$, то преобразования (11), (12) излишни.

$$Z = z + t \left\{ A \frac{z^2 (z_0 - z(a))^2}{z_0^2 (z - z(a))} - \frac{1}{2} \frac{F'}{F_z} A \left[\frac{z(a) (z_0 - z(a))^2}{az_0 z'(a)} \right]^2 \frac{F + A}{F - a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{F}{F_z} A \left[\frac{z(a) (z_0 - z(a))^2}{az_0 z'(a)} \right]^2 \frac{1 + \bar{a}F}{1 - \bar{a}F} - \right. \\ \left. - \frac{A}{2d} \left[\frac{z(a) (z_0 - z(a))^2}{az_0 z'(a)} \right]^2 \frac{w_0 (w_0 + a)}{w_0 - a} z^2 + \right. \\ \left. + \frac{A}{2\bar{d}} \left[\frac{z(a) (z_0 - z(a))^2}{az_0 z'(a)} \right]^2 \frac{w_0 (1 + \bar{a}w_0)}{1 - \bar{a}w_0} z^2 - \operatorname{Re} \left[A \left(\frac{z(a) (z_0 - z(a))^2}{az_0 z'(a)} \right)^2 z \right] \right\} + o(t), \quad (13)$$

где $z = f(w)$, $F = F(f(w), \tau)$ и $z(a) = z(a, \tau)$ — значение в точке a функции, обратной $F(z, \tau)$.

Отсюда, повторяя известные рассуждения (см. ⁽¹⁾, стр. 73), учитывая после вывода произвольность точки a , $|a| < 1$, и заменяя a и $z(a, \tau)$ на $F(z, \tau)$ и z , получим уравнение (4).

§ 3. Следствие. Известно, что $F(z, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = F \frac{\mu + F}{\mu - F}, \quad (14)$$

где $\mu(\tau)$ — точка окружности $|w| = 1$, соответствующая $z(\tau)$. Из условия совместности (4) и (14) получается уравнение для $B(F, \tau)$:

$$\frac{\partial \log B}{\partial \tau} + F \frac{\mu + F}{\mu - F} \frac{\partial \log B}{\partial F} = - \frac{4\mu F}{(\mu - F)^2}. \quad (15)$$

Полагая

$$B = \frac{e^{(n-1)\tau}}{F^{n-1} (F - w_0) \left(F - \frac{1}{w_0}\right)} \prod_{k=1}^p (F - a_k(\tau))^{n_k} (F - \mu)^m, \quad (16)$$

из требования, чтобы это выражение удовлетворяло уравнению (15), находим, что $m = 2$, $\sum_{k=1}^p n_k = 2(n-1)$ и функции $a_k(\tau)$, $\mu(\tau)$, $w_0(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$2 \frac{d \log \mu}{d\tau} = \frac{d \log \frac{w_0}{w_0}}{d\tau} - \sum_{k=1}^p n_k \frac{d \log a_k}{d\tau}, \quad (17) \\ \frac{d \log w_0}{d\tau} = \frac{\mu + w_0}{\mu - w_0}, \quad \frac{d \log a_k}{d\tau} = \frac{\mu + a_k}{\mu - a_k}.$$

Соотношение (4) можно рассматривать как производную первого интеграла системы (17).

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
19 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. М. Голузин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 27 (1949). ² П. П. Куфарев, Матем. сборн., 13 (55), № 1, 411 (1943).