

И. Е. ЖАК

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЗИГМУНДА О СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1954)

Если 2π -периодическая функция $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то, как показал И. И. Привалов ⁽¹⁾, сопряженная с ней функция $\bar{f}(x)$

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+u) - f(x-u)] \operatorname{ctg} \frac{u}{2} du$$

обладает тем же свойством.

Это утверждение, как известно ⁽¹⁾, при $\alpha = 1$ теряет силу и заменяется следующей теоремой, принадлежащей А. Зигмунду ⁽²⁾:

Если непрерывная 2π -периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = O(h^\alpha), \quad h \rightarrow 0, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

равномерно относительно x , то то же самое имеет место и для функции $\bar{f}(x)$.

Установлено, что теорема И. И. Привалова не переносится на функции двух переменных. Именно, если $f(x, y) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то сопряженные с ней функции $\bar{f}_1(x, y)$, $\bar{f}_2(x, y)$, $\bar{f}_3(x, y)$

$$\bar{f}_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+s, y) - f(x-s, y)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds,$$

$$\bar{f}_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x, y+t) - f(x, y-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt,$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_3(x, y) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi [f(x+s, y+t) - f(x-s, y+t) - f(x+s, y-t) + \\ & + f(x-s, y-t)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} ds dt, \end{aligned}$$

вообще говоря, как показано в работе ⁽³⁾, принадлежит к классу $\text{Lip } \alpha'$, $0 < \alpha' < \alpha$.

В настоящей заметке показывается, что сформулированная выше теорема А. Зигмунда также не переносится на функции двух переменных.

Определение. Скажем, что непрерывная в прямоугольнике G функция $f(x, y)$ принадлежит на нем к классу $Z^{(\alpha)}$, $0 < \alpha \leq 1$, если выполняется следующее условие:

$$f(x+h, y+\eta) + f(x-h, y-\eta) - 2f(x, y) = O(h^\alpha) + O(\eta^\alpha), \quad h, \eta \rightarrow 0, \\ \text{равномерно относительно } (x, y) \in G.$$

Справедливо утверждение:

Для того чтобы 2π -периодическая по каждому переменному функция $f(x, y) \in Z^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x, y) \in \text{Lip } \alpha$.

Доказательство этого утверждения проводится совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для одномерного случая ((²), лемма 4). Отсюда, на основании отмеченного выше результата работы (³), вытекает, что если $f(x, y) \in Z^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, то $f_i(x, y) \in Z^{(\alpha')}$, $0 < \alpha' < \alpha$, $i = 1, 2, 3$, и число α' , вообще говоря, нельзя заменить на α . Это показывает, что в случае $0 < \alpha < 1$ теорема А. Зигмунда не переносится на функции двух переменных.

Построим далее функцию $f(x, y) \in Z^{(1)}$ такую, что $\bar{f}_1(x, y) \in Z^{(1)}$.

Пусть $\delta_0 = 0$, а $\{\delta_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i < 1$.

Положим $J_n = \left[-\pi \leq x \leq \pi; 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \leq y < 2 \sum_{i=0}^n \delta_i \right]$, $n = 1, 2, \dots$, и определим на J_n функцию $f(x, y)$ следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi \leq x \leq \pi; y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i; \\ 0, & \text{„ } -\pi \leq x \leq -\delta_n; y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n; \\ x + \delta_n, & \text{„ } -\delta_n < x \leq 0; y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n; \\ \delta_n, & \text{„ } 0 < x \leq \pi - \delta_n; y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n; \\ -x + \pi, & \text{„ } \pi - \delta_n < x \leq \pi; y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n. \end{cases}$$

При $-\pi \leq x \leq \pi$, $2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i < y < 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n$ определяем $f(x, y)$ линейной интерполяцией по переменному y , а при $-\pi \leq x \leq \pi$, $2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n < y < 2 \sum_{i=0}^n \delta_i$ строим $f(x, y)$ симметрично относительно плоскости $y = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n$. Таким образом, функция $f(x, y)$ определяется на прямоугольнике $Q = \left[-\pi \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \right]$.

Полагаем, наконец, $f(x, y) = 0$ во всех остальных точках квадрата $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi]$.

Нетрудно проверить, что в R $f(x, y) \in \text{Lip } 1$. При этом очевидно, что ее можно продолжить периодически на всю плоскость так, что она будет принадлежать к классу $\text{Lip } 1$.

Покажем, что $\bar{f}_1(x, y) \in Z^{(1)}$.

Действительно, положим $y_n = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i + \delta_n$. Из построения функции

$f(x, y)$ следует, что $\bar{f}_1(0, y_n - \delta_n) = \bar{f}_1(0, y_n + \delta_n) = 0$.

Заметим, что при $0 \leq s \leq \pi$ $f(s, y_n) \geq f(-s, y_n)$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} & \pi |\bar{f}_1(0, y_n + \delta_n) + \bar{f}_1(0, y_n - \delta_n) - 2\bar{f}_1(0, y_n)| = \\ & = \int_0^\pi [f(s, y_n) + f(-s, y_n)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds > \int_{\delta_n}^{\pi - \delta_n} [f(s, y_n) - f(-s, y_n)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds = \\ & = \delta_n \int_{\delta_n}^{\pi - \delta_n} \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds = 2\delta_n \left| \ln \operatorname{ctg} \frac{\delta_n}{2} \right| > \delta_n |\ln \delta_n|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\bar{f}_1(x, y) \in Z^{(1)}$.

Соответствующий пример относительно функции $\bar{f}_2(x, y)$ строится аналогично.

Покажем теперь, что функция $\bar{f}_3(x, y)$, соответствующая построенной функции $f(x, y)$, не принадлежит к классу $Z^{(1)}$. Положим $\varphi(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dy \text{ и пусть } \bar{\varphi}(x) \text{ есть сопряженная с ней функция.}$$

Имеет место следующая формула:

$$\bar{f}_1(x, y) = \bar{\varphi}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\bar{f}_3(x, y+t) - \bar{f}_3(x, y-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \quad (1)$$

из которой следует, что $\bar{f}_3(x, y) \in Z^{(1)}$.

Действительно, из допущения, что $\bar{f}_3(x, y) \in Z^{(1)}$, должно было бы вытекать соотношение

$$\bar{f}_3(x, y + \eta) + \bar{f}_3(x, y - \eta) - 2\bar{f}_3(x, y) = O(\eta), \quad \eta \rightarrow 0,$$

равномерно относительно (x, y) . Но в таком случае, применяя теорему Зигмунда к интегралу в правой части равенства (1), приходим к заключению, что и функция $\bar{f}_1(x, y)$ должна обладать этим же свойством, а последнее, как показано выше, не имеет места. Таким образом установлено, что $\bar{f}_3(x, y) \notin Z^{(1)}$. Тем самым показано, что теорема А. Зигмунда не переносится на функции двух переменных и в случае $\alpha = 1$.

Сталинградский педагогический институт
им. А. С. Серафимовича

Поступило
26 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939. ² А. Zygmund, Duke Math. J., 12 (1945). ³ И. Е. Жак, ДАН, 87, № 6 (1952). ⁴ И. Е. Жак, Матем. сборн., 31 (73): 3, 469 (1952).