

М. И. ГУРЕВИЧ

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 27 IV 1954)

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

путем замены переменных

$$x = -r \frac{\cos \sigma}{\operatorname{sh} \delta}, \quad y = -r \frac{\sin \sigma}{\operatorname{sh} \delta}, \quad z = -r \operatorname{cth} \delta \quad (2)$$

можно свести к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \delta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (3)$$

В дальнейшем будут рассматриваться решения (1) только внутри конуса

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (z > 0). \quad (4)$$

В этом случае $r = \sqrt{z^2 - x^2 - y^2}$ будет действительно. Решение (1) будем искать в виде

$$\varphi = r \varphi_1 + r^2 \varphi_2 + \dots + r^n \varphi_n + \dots \quad (5)$$

Уравнение (1) удовлетворяется, если каждое $\varphi_n(\delta, \sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \delta^2} - \frac{n(1+n)}{\operatorname{sh}^2 \delta} \varphi_n = 0. \quad (6)$$

Если обозначить через v_n произвольную функцию от δ и σ , то имеет место тождество

$$M_{n+1}(v_{n+1}) = \frac{\partial M_n(v_n)}{\partial \delta} - (n+1) \operatorname{cth} \delta M_n(v_n), \quad (7)$$

где $M_n(\varphi_n)$ изображает левую часть уравнения (6), а $v_{n+1} = \partial v_n / \partial \delta - (n+1) \operatorname{cth} \delta \cdot v_n$.

Можно получить решение (6), зависящее от произвольной гармонической функции $[F_n(\omega) + \overline{F_n(\omega)}] / 2$, где $\omega = \delta + i\sigma$.

Очевидно, что если $M_n(v_n) = 0$, то и $M_{n+1}(v_{n+1}) = 0$. Так как $[F_n(\omega) + \overline{F_n(\omega)}] / 2$ является решением уравнения (6) при $n=0$, то при помощи (7) отсюда можно получить решение уравнения (6) в виде

$$\varphi_n = \operatorname{sh}^{n+1} \delta \left(\operatorname{sh} \delta \frac{\partial}{\partial \delta} \right)^n \frac{F_n(\omega) + \overline{F_n(\omega)}}{2 \operatorname{sh} \delta}. \quad (8)$$

Для определения функций $F_n(\omega)$ следует обратиться к граничным условиям конкретных физических задач. Решение, аналогичное (1), хотя и в другой форме, имеется в работе (1).

Перейдем к анализу решения (8). Можно показать, что функция $F_n(\omega)$ определяется с точностью до слагаемого

$$F_n^{(0)}(\omega) = \sum_{k=1}^n (ib_k \operatorname{ch} k\omega + c_k \operatorname{sh} k\omega), \quad (9)$$

где b_k и c_k — произвольные действительные постоянные, так как функции $F_n^{(0)}(\omega)$ тождественно обращают в нуль правую часть (8). Чтобы избежать решения граничных задач для не вполне определенных функций $F_n(\omega)$, можно ввести новые функции

$$Z_n(\omega) = \left(\frac{d^2}{d\omega^2} - n^2 \right) \dots \left(\frac{d^2}{d\omega^2} - 2^2 \right) \left(\frac{d^2}{d\omega^2} - 1 \right) F_n(\omega). \quad (10)$$

Функции $Z_n(\omega)$ определяются точно, так как $F_n^{(0)}(\omega)$ под действием оператора, стоящего в правой части (10), исчезают. Если $Z_n(\omega)$ известно, то для нахождения $F_n(\omega)$ следует проинтегрировать уравнение (10). Воспользуемся для этого символическим методом⁽²⁾. Обозначая $d/d\omega$ через D , разложим на элементарные дроби функцию

$$\frac{1}{(D^2 - n^2) \dots (D^2 - 1)} = \frac{A_{n,n}}{D - n} + \frac{B_{n,n}}{D + n} + \dots + \frac{A_{1,n}}{D - 1} + \frac{B_{1,n}}{D + 1}. \quad (11)$$

Тогда общее решение (10) имеет вид:

$$F_n(\omega) = \sum_{k=1}^n A_{k,n} \left[e^{k\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{-k\omega} Z_n d\omega - e^{-k\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} e^{k\omega} Z_n d\omega \right] + \sum_{k=1}^n [(a_k + ib_k) \operatorname{ch} k\omega + (c_k + id_k) \operatorname{sh} k\omega]. \quad (12)$$

Постоянные b_k и c_k , как было отмечено выше, совершенно произвольны; a_k и d_k следует определять из граничных условий, например, на конусе (4).

Из формулы (12) можно вывести важное следствие. Заменим переменное ω через $\tau = e^\omega$. Тогда интегральные члены в (12) будут иметь вид

$$A_{k,n} \left[\tau^k \int Z_n \tau^{-(k+1)} d\tau - \tau^{-k} \int Z_n \tau^{k-1} d\tau \right].$$

Очевидно, что для того, чтобы $F_n(\tau)$ не имело логарифмической особенности при $\tau = 0$ (ось z), производные $Z_n(\tau)$ должны удовлетворять условиям

$$\left(\frac{d^k Z_n(\tau)}{d\tau^k} \right)_{\tau=0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Эти условия обязательно следует иметь в виду, когда ось z находится в среде, для которой имеет место волновое уравнение.

К функциям $Z_n(\omega)$ можно придти и другим путем, который может оказаться полезным при выводе граничных условий для $Z_n(\omega)$. Если искать решение (1) в виде

$$\varphi = \sum_1^\infty z^n f_n(\delta, \sigma), \quad (14)$$

то принимая, что решение (14) тождественно с (5), можно доказать, что

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} [z^n f_n(\delta, \sigma)] = (-1)^n \operatorname{Re} Z_n(\omega).$$

Поступило
21 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Д. Хаскинд, С. В. Фалькович, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 3 (1947). ² В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 2, 1951.