

С. С. БЮШГЕНС

К ТЕОРИИ КОНГРУЕНЦИЙ ЛИНИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 V 1954)

В трехмерном евклидовом пространстве конгруенции произвольных линий или векторные поля их касательных могут быть, как я указывал ранее ⁽¹⁾, классифицированы по расположению введенных мною смещений параллелизма. Конечно, для конгруенции линий возможны самые разнообразные способы классификаций; другой способ был бегло намечен мною еще в статье ⁽²⁾. Здесь я имею в виду дать его развитие.

Каждая конгруенция линий может быть определена при помощи двух однопараметрических семейств поверхностей так, что две любых поверхности, взятые из того и другого семейства, своим пересечением определяют одну из линий конгруенции; два выбранные семейства поверхностей можно заменить (разнообразными способами) парю других семейств, определяющих ту же конгруенцию. В общем случае поверхности этих семейств, как бы мы их не выбирали для данной конгруенции, между собой не будут ортогональны. Однако существуют конгруенции, для которых можно выбрать определенную пару семейств поверхностей так, что поверхности двух разных семейств будут всегда ортогональны; такие конгруенции я предложил бы называть биортогональными. Присоединим к каждой точке $\bar{M}$ любой линии данной конгруенции ортогональный репер единичных векторов J_1, J_2, J_3 , причем J_3 возьмем по касательной к линии конгруенции, и примем обозначения

$$\begin{aligned} d\bar{M} &= \omega_0^\alpha J_\alpha, \\ dJ_1 &= rJ_2 - qJ_3, \quad dJ_2 = pJ_3 - rJ_1, \quad dJ_3 = qJ_1 - pJ_2, \\ p &= p_\alpha \omega_0^\alpha, \quad q = q_\alpha \omega_0^\alpha, \quad r = r_\alpha \omega_0^\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Если конгруенция биортогональная и векторы

$$J_1 \cos \sigma + J_2 \sin \sigma, \quad -J_1 \sin \sigma + J_2 \cos \sigma \quad (2)$$

будут нормальными двух поверхностей соответствующих двух ортогональных семейств, то, как я показал ⁽²⁾, должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} (p_1 - q_2) \cos 2\sigma + (p_2 + q_1) \sin 2\sigma &= 0, \\ \left(d\sigma + r + \frac{p_1 + q_2}{2} \omega_0^3 \right) \omega_0^1 \omega_0^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где во втором соотношении обычным произведением я обозначаю внешнее произведение форм Пфаффа. Первое из этих условий обозначает, что векторы (2) направлены по биссектрисам асимптотических линий поля (J_3), или, что то же самое, эти векторы имеют направления линий кривизны II рода поля (J_3).

Этот результат можно представить и в несколько другом виде. Пусть векторы J_1, J_2 направлены по линиям кривизны II рода, тогда

$$p_1 - q_2 = 0, \quad (4)$$

и допустим, что поле (J_1) , т. е. поле направлений одного семейства линий кривизны II рода, допускает ортогональное семейство поверхностей.

В таком случае уравнение

$$\omega_0^1 = 0$$

вполне интегрируемо и, следовательно,

$$(\omega_0^1)' \omega_0^1 = 0$$

или

$$q_2 + r_3 = 0. \quad (5)$$

Но из последнего соотношения, в силу условия (4), следует, что

$$p_1 + r_3 = 0, \quad (5')$$

т. е. уравнение

$$\omega_0^2 = 0$$

также вполне интегрируемо и второе семейство линий кривизны II рода тоже допускает ортогональное семейство поверхностей; эти два семейства поверхностей (ортогональные) и определяют биортогональную конгруэнцию линий, огибаемых векторами поля (J_3) . Итак, для того, чтобы конгруэнция линий была биортогональной, необходимо и достаточно, чтобы для поля ее касательных по крайней мере одно семейство линий кривизны II рода допускало ортогональное семейство поверхностей, и в таком случае второе семейство линий кривизны также будет допускать ортогональное семейство поверхностей.

Наконец, возможен еще третий тип конгруэнции, именно, с неопределенными линиями кривизны II рода; в этом случае тождественно

$$p_1 - q_2 = 0, \quad p_2 + q_1 = 0, \quad (6)$$

и такую конгруэнцию я предлагал назвать омбиликальной, ибо в каждой точке нормальная кривизна поля (J_3) одинакова по всем (ортогональным к J_3) направлениям.

Существенно отметить, что, хотя каждая из левых частей условий (6) не является в отдельности инвариантом при вращении репера около J_3 , однако совокупность этих условий остается неизменной при указанном вращении репера.

При условиях (6) первое из соотношений (3) пропадает тождественно. Нетрудно видеть, что и второе условие (3) будет выполнено, если мы возьмем любое однопараметрическое семейство поверхностей, содержащих линии данной конгруэнции. В самом деле, пусть поле (J_1) будет полем нормалей этого семейства, тогда выполняется условие (6), но в силу этого условия и первого из соотношений (6) при $\sigma = 0$ выполняется и второе условие (3). Итак, через каждую омбиликальную конгруэнцию линий можно провести бесконечное множество пар ортогональных однопараметрических семейств поверхностей.

Уравнения (6), характеризующие омбиликальную конгруэнцию, огибаемую векторами поля (J_3) , можно записать в форме внешних произведений, именно, в виде

$$p\omega_0^2\omega_0^3 - q\omega_0^3\omega_0^1 = 0, \quad p\omega_0^3\omega_0^1 + q\omega_0^2\omega_0^3 = 0; \quad (7)$$

пусть (J_1) будет полем нормалей однопараметрического семейства поверхностей, содержащих линии конгруенции, тогда присоединяется условие (5), которое можно записать в виде

$$q\omega_0^3\omega_0^1 + r\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \quad (8)$$

Итак, омбиликальная конгруенция линий, огибаемых векторами поля (J_3), характеризуется системой уравнений (7) и (8); но в таком случае решение зависит от трех произвольных функций, каждая из которых зависит от двух аргументов. Однако одна из этих функций не имеет существенного значения для самой омбиликальной конгруенции и характеризует лишь выбор пары ортогональных семейств поверхностей, определяющих конгруенцию. Действительно, если одна пара семейств поверхностей выбрана, условие (5) выполнено, тогда всякая другая пара таких семейств будет иметь поля нормалей (2), причем σ удовлетворяет второму из уравнений (3). Но последнее при условии (5) приводится к виду

$$d\sigma\omega_0^1\omega_0^2 = 0, \quad (9)$$

а таковое обозначает, что σ есть произвольная функция от двух аргументов, постоянная вдоль каждой отдельной линии омбиликальной конгруенции.

Отметим интересное обстоятельство: если взята какая-нибудь пара ортогональных однопараметрических семейств поверхностей и, следовательно, условия (5) и (5') выполнены, тогда выполняется и первое из уравнений (6), как следствие предыдущих. Таким образом, *чтобы пара ортогональных семейств поверхностей определяла омбиликальную конгруенцию, необходимо и достаточно выполнение лишь одного второго уравнения (6).*

Пусть поле (J_3) огибает омбиликальную конгруенцию, J_1 и J_2 направлены по нормальям двух ортогональных семейств поверхностей через линии конгруенции. Положим

$$\omega_0^1 = \frac{d\varphi}{A}, \quad \omega_0^2 = \frac{d\psi}{B},$$

тогда

$$d\varphi = AJ_1 dM, \quad d\psi = BJ_2 d\bar{M},$$

т. е.

$$AJ_1 = \text{grad } \varphi, \quad BJ_2 = \text{grad } \psi,$$

а A и B суть модули этих градиентов. Возьмем теперь уравнения структуры

$$-\frac{dA}{A^2}d\varphi = r\omega_0^2 - q\omega_0^3, \quad -\frac{dB}{B^2}d\psi = p\omega_0^3 - r\omega_0^1;$$

умножая внешним образом первое из них на ω_0^2 , а второе на ω_0^1 , мы легко получим

$$\left(\frac{dB}{B} - \frac{dA}{A}\right)d\varphi d\psi = AB(p_2 + q_1)\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3.$$

Отсюда сейчас же вытекает, что второе из уравнений (6) равносильно условию:

$$\left(\frac{dB}{B} - \frac{dA}{A}\right)d\varphi d\psi = 0, \quad (10)$$

т. е. если омбиликальная конгруенция определена пересечением двух ортогональных семейств поверхностей $\varphi = a$, $\psi = b$, то отношение

величин градиентов этих функций φ и ψ постоянно вдоль каждой отдельной линии конгруэнции. Условие (10) мы можем написать в виде

$$B = Af(\varphi, \psi), \quad (10')$$

где f — неизвестная функция, произвол которой может быть ограничен в силу дальнейших условий совместности. Предыдущие замечания позволяют написать уравнения, определяющие омбиликальную конгруэнцию в декартовой системе координат; это будут уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = [f(\varphi, \psi)]^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

В частности, например, при помощи этих уравнений легко получить омбиликальную конгруэнцию, расположенную в параллельных плоскостях ($\varphi \equiv z = a$); это будет конгруэнция, состоящая из одинаковых (независимо от z) семейств параллельных кривых произвольного вида в этих плоскостях.

Если омбиликальная конгруэнция допускает семейство ей ортогональных поверхностей, то для последнего поле (J_3) будет полем нормалей и, следовательно, эти поверхности сами омбиликальные, т. е. либо сферы, либо плоскости. Очевидно и обратно, ортогональные траектории любого семейства сфер или плоскостей образуют омбиликальную конгруэнцию.

Наконец, если омбиликальная конгруэнция будет прямолинейной, тогда $p_3 = q_3 = 0$, и при условиях (6) легко убедиться, что обе формы Куммера имеют пропорциональные коэффициенты. Таким образом, прямолинейная омбиликальная конгруэнция есть прямолинейная изотропная конгруэнция.

Московский институт водного хозяйства
им. В. Р. Вильямса

Поступило
4 V 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. С. Бюшгенс, Вестн. Моск. унив., № 2 (1950). ² С. С. Бюшгенс, Изв. АН СССР, сер. матем., № 10 (1946).