

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. БАБИЧ

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 IV 1954)

1°. Рассмотрим систему уравнений Генки — Шмидта *

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial e_{ij}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}, \quad (1)$$

где

$$\Pi = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \int_{\Gamma^2} g(\zeta) d\zeta$$

и, кроме того,

$$k > 0; \quad g > 0; \quad \rho > 0. \quad (2)$$

Мы считаем среду упрочняющейся, и поэтому

$$g + 2\Gamma^2 g' > 0. \quad (2')$$

Применим к системе (1) теорию кинематических и динамических условий совместности (2).

Пусть вектор смещения u непрерывен с первыми производными, а вторые его производные имеют скачок на поверхности $\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$. Если обозначить квадратными скобками величину этого скачка, то кинематические условия требуют, чтобы

$$[u_{x_i x_j}] = h_{ij} \omega_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3; \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \omega_i). \quad (3)$$

Из динамических условий совместности вытекает, что компоненты h_i вектора разрыва h должны удовлетворять линейной алгебраической системе уравнений

$$\sum_{j=1}^3 \omega'_{ij} h_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \omega'_{ij} = & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) \omega_i \omega_j + \left(2g \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - \rho \omega_0^2 \right) \delta_{ij} + \\ & + g' \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Gamma^2}{\partial e_{ik}} \omega_k \right) \left(\sum_{k'=1}^3 \frac{\partial \Gamma^2}{\partial e_{ik'}} \omega_{k'} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Условие, что система (4) имеет нетривиальное решение, запишет-ся как равенство нулю ее определителя $|\omega'_{ij}|$, откуда вытекает, что

* В обозначениях мы всегда следуем монографии (1) с тем отступлением, что вместо переменных t, x, y, z введены x_0, x_1, x_2, x_3 .

$\rho\omega_0^2$ может иметь лишь следующие значения:

$$\rho\omega_0^2 = 2g |\operatorname{grad} \omega|^2;$$

$$\begin{aligned} \rho\omega_0^2 = 2g |\operatorname{grad} \omega|^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) |\operatorname{grad} \omega|^2 + \frac{g'}{2} |\mathbf{X}|^2 \pm \\ \pm \left\{ \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) |\operatorname{grad} \omega|^2 + \frac{g'}{2} |\mathbf{X}|^2 \right]^2 - \frac{g'}{3} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) |\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X}|^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\operatorname{grad} \omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$ — вектор,

$$X_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Gamma^2}{\partial e_{ik}} \omega_k \quad (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

2°. Можно показать, что условия (2) и (2') достаточны для того, чтобы правые части формул (6) были вещественны и положительны при любых $\operatorname{grad} \omega$ и e_{ik} . Доказательство это не представляет никакого труда при $g' \geq 0$. В случае $g' < 0$ сомнение может вызвать лишь положительность того выражения, которое соответствует знаку минус перед радикалом во второй из формул (6).

Доказательство положительности ω_0^2 в этом случае основано на двух неравенствах:

$$|\mathbf{X}|^2 |\operatorname{grad} \omega|^2 + \frac{1}{3} |\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X}|^2 \leq \frac{16}{3} |\operatorname{grad} \omega|^4 \Gamma^2; \quad (8)$$

$$2g |\operatorname{grad} \omega|^4 + g' |\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X}|^2 > 0. \quad (9)$$

Доказать неравенство (8) можно следующим образом. Возьмем за координатные оси главные оси деформации, после чего сделаем подстановку:

$$\begin{aligned} e_{11} = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \varphi + \frac{1}{3} e; \quad e_{22} = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} e; \\ e_{33} = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \sin \left(\varphi + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} e. \end{aligned} \quad (10)$$

Если теперь ввести обозначения

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_2^2 \omega_3^2}{|\operatorname{grad} \omega|^4}, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}{|\operatorname{grad} \omega|^6}, \quad (11)$$

то неравенство (8) легко сводится к неравенству

$$\alpha_1 + \sqrt{(1 - \alpha_1)^2 - 12\alpha_2} \leq 1. \quad (12)$$

В области изменения α_1 и α_2 , определяемой формулами (11), $\alpha_1 + \sqrt{(1 - \alpha_1)^2 - 12\alpha_2}$ монотонно убывает как при возрастании α_1 , так и при возрастании α_2 . Но α_1 и α_2 в силу (11) неотрицательны, поэтому

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 + \sqrt{(1 - \alpha_1)^2 - 12\alpha_2} \leq f(0, 0) = 1.$$

Этим доказано неравенство (12), а стало быть и неравенство (8).

На доказательстве неравенства (9) мы останавливаться не будем. Заметим только, что оно устанавливается тоже при помощи подстановки (10). Вместо α_1 и α_2 здесь следует ввести

$$\beta_1 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{|\operatorname{grad} \omega|^4}, \quad \beta_2 = \frac{\omega_3^2}{|\operatorname{grad} \omega|^2}.$$

Положительность ω_0^2 в рассматриваемом случае эквивалентна, как легко доказать, неравенству

$$2g|\operatorname{grad} \omega|^2(2g|\operatorname{grad} \omega|^2 + g'|\mathbf{X}|^2) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} + 2g\right)[2g|\operatorname{grad} \omega|^4 + g'(\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X})^2] > 0. \quad (13)$$

Выражение в квадратных скобках здесь в силу (9) положительно, $k > 0$, и поэтому неравенство (13) будет выполнено всегда, если оно верно при $1/k = 0$. В случае $1/k = 0$ неравенство (13) приводится к виду

$$-\frac{g'\Gamma^2}{2g} < \frac{\frac{4}{3}\Gamma^2|\operatorname{grad} \omega|^4}{|\mathbf{X}|^2|\operatorname{grad} \omega|^2 + \frac{1}{3}|\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X}|^2}.$$

Последнее неравенство выполняется в силу (8) и условия упрочнения (2'). Это и доказывает положительность ω_0^2 .

Сделаем еще два замечания:

1) Доказанная нами вещественность и положительность ω_0^2 , определяемых формулами (6), говорит о гиперболичности по Куранту системы уравнений (1) ((3), стр. 136—140).

2) Матрицу $\|\omega_{ij}\|$ можно переписать в виде $\|\omega_{ij}\| = \|a_{ij}\| - \rho\omega_0^2 I$. Здесь I — единичная матрица, $\|a_{ij}\|$ — симметричная матрица: $a_{ij} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} + 2g\right)\omega_i\omega_j + 2g|\operatorname{grad} \omega|^2\delta_{ij} + g'X_iX_i$. Положительность $\rho\omega_0^2$ в формулах (6) говорит о том, что $\|a_{ij}\|$ — положительная матрица, значит, в случае упрочнения система уравнений статики сред Генки — Шмидта сильно эллиптична по М. И. Вишику (4).

3°. $\frac{\omega_0}{|\operatorname{grad} \omega|}$ дает скорость перемещения в пространстве x_1, x_2, x_3 поверхности разрыва, т. е. скорость волны. Формула (6) показывает, что в случае $\Gamma^2 > 0$ скорость самых быстрых и самых медленных волн зависит от направления. Таким образом, поле напряжений создает своеобразную анизотропию. Рассмотрим случай волн со средней скоростью. Их скорость не зависит от направления.

Найдем «вектор разрыва» $\mathbf{h}$. Его компоненты, как уже говорилось в § 1, удовлетворяют системе

$$\sum_{i=1}^3 \omega'_{ij} h_i = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Полагая $2g \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 - \rho\omega_0^2 = 0$ и вычисля алгебраические дополнения

последней строки определителя $|\omega'_{ij}|$, получим, что вектор $\mathbf{h}$ параллелен вектору $\operatorname{grad} \omega \times \mathbf{X}$. Легко доказать, что это означает, что вектор $\mathbf{h}$ перпендикулярен к $\operatorname{grad} \omega$ и вектору напряженности $\mathbf{t}^{(\operatorname{grad} \omega)}$ на площадке с нормалью $\operatorname{grad} \omega$.

Таким образом, волна со средней скоростью имеет поперечный характер. Однако направление вектора разрыва $\mathbf{h}$ зависит от поля напряжений (чего нет в случае линейного закона Гука).

Относительно волн с наименьшей и наибольшей скоростями можно сказать, что они не будут, вообще говоря, ни продольными, ни поперечными.

Посмотрим, как меняется скорость самых быстрых волн с изменением их направления. Пусть $e_{11} = e_{22} = \varepsilon_1$, $e_{33} = \varepsilon_3$. Тогда $\Gamma^2 =$

$= \frac{16}{27} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2$. Скорость этих волн будет

$$\rho V^2 = 2g + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) + \frac{8}{3} g' \cos^2 \varphi + \\ + \sqrt{\left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} + 2g \right) + \frac{8}{3} g' \Gamma^2 \cos^2 \varphi \right]^2 + \frac{16}{9} g' \Gamma^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}, \quad (14)$$

где φ — угол между нормалью к волновому фронту и осью x_3 .

Нетрудно показать, что ρV^2 в формуле (14) — возрастающая функция угла φ .

4°. Пусть ось x_3 направлена перпендикулярно к земной поверхности. Из соображений симметрии ясно, что породы в глубине земли находятся в напряженном состоянии, для которого $e_{11} = e_{22}$. Эксперименты⁽⁵⁾ обнаружили возрастание скорости сейсмических волн с возрастанием угла φ (т. е. с возрастанием угла между нормалью к фронту и вертикалью). Теория Генки — Шмидта приводит к тому же результату. Возможно, это явление связано с пластическими свойствами пород и объяснимо, если исходить из схемы среды Генки — Шмидта.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. М. Качанов, Механика пластических сред, 1948. ² В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, М—Л., 1951. ³ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1951. ⁴ М. И. Вишик, Матем. сборн., 29 (71), 3 (1951). ⁵ N. Ricker Third World Petroleum Congress, Leiden, 1951.