

А. Ф. КРЮЧИН

ОБТЕКАНИЕ КЛИНОВИДНОГО ПРОФИЛЯ С ОТСОЕДИНЕННОЙ ЛИНИЕЙ СИЛЬНОГО РАЗРЫВА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 V 1954)

Для клина, симметрично обтекаемого установившимся потоком газа, при отсутствии трения и теплопередачи, когда число M_∞ мало превосходит единицу, в плоскости «годографа» удастся подставить граничную задачу. При этом поток около клина найдется как решение уравнения

$$yZ_{xx} + Z_{yy} = 0, \quad (E)$$

которое получается из уравнений движения газа применением к последним закона околосзвукового подобия ⁽¹⁾. В качестве основных переменных выбираем $x = \frac{v}{\theta a_*}$ и $y = \frac{x+1}{\theta^{1/2}} \left(1 - \frac{u}{a_*}\right)$; здесь u, v — компоненты вектора скорости на оси x_1, y_1 ; a_* — критическая скорость клина; χ — показатель адиабаты.

Если $M_\infty > 1$, то перед клином образуется линия сильного разрыва. Между этой линией и профилем будет некоторая область с дозвуковыми скоростями. Картина движения в физической плоскости и в плоскости «годографа» (x, y) показана на рис. 1 и 2, причем соответственные точки обозначены одинаковыми буквами.

Поток около клина найдется как решение уравнения (E) при следующих граничных условиях:

- 1) искомая функция $Z = 0$ вдоль DK и BK ; 2) $Z = 0$ вдоль характеристики BC с уравнением $(x-1)^2 + \frac{4}{3}y^3 = 0$; 3) вдоль кривой третьего порядка DA с уравнением

$$2x^2 + (y - \Lambda)^2 (y + \Lambda) = 0 \quad (1)$$

выполняется соотношение:

$$(5y + 3\Lambda) Z_y + \sqrt{-1/2} (\Lambda + y) (7y + \Lambda) Z_x = 0; \quad (2)$$

- 4) $Z = Z_A$ в точке A , где $Z_A > 0$ — заданная величина.

Видим, что решение зависит только от критерия околосзвукового подобия $\Lambda = \frac{2(1-M_\infty)}{[(x+1)\theta]^{1/2}}$. Это позволяет сделать некоторые качественные выводы. Например, момент присоединения линии сильного разрыва к острию клина определяется таким значением $\Lambda = \Lambda_1$, при котором кривая третьего порядка касается прямой $x = 1$. Простые

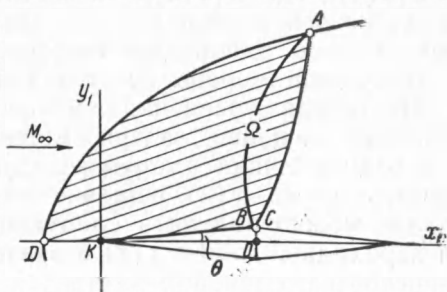


Рис. 1

вычисления дают $\Lambda_1 \simeq -1,19$. При меньших Λ поток между линией сильного разрыва и профилем в некоторых пределах остается дозвуковым. Момент перехода в чисто сверхзвуковой режим обтекания определяется из условия прохождения кривой третьего порядка через точку $(1, 0)$ что дает $\Lambda_2 \simeq -1,26$.

Для решения поставленной граничной задачи используются частные решения уравнения (Е), линейными комбинациями которых удастся приближенно удовлетворить всем граничным условиям.

Решение задачи ищем в виде:

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda(\pi^{2/3} n^{2/3} y) \sin \pi n x, \quad (3)$$

где функция $\lambda(\pi^{2/3} n^{2/3} y)$ определена уравнениями

$$\lambda''(\pi^{2/3} n^{2/3} y) - \pi^{2/3} n^{2/3} y \lambda(\pi^{2/3} n^{2/3} y) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda(0) = 1, \quad \lambda(+\infty) = 0;$$

C_n — произвольные коэффициенты, которые выбирают так, чтобы удовлетворялись граничные условия на характеристике BC и на кривой третьего порядка AD .

Сначала ищем решение уравнения (Е) для области $K'OC'BK$ при следующих граничных условиях: на KB, OK' и BC $Z = 0$, на CC' $Z = \varphi(x)$. Пусть в результате решения этой задачи мы выразили $\tau(x) = Z(x, 0)$ через функцию $\varphi(x)$: $\tau(x) = L[\varphi(x)]$, где $L[\varphi(x)]$ — известный оператор. Тогда коэффициенты C_n найдутся как коэффициенты ряда Фурье. Выбираем $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялось однородно-линейное соотношение (2). Таким образом будут удовлетворены все граничные условия.

Из теории уравнений смешанного эллипсо-гиперболического типа известно решение задачи Коши для уравнения (Е) с данными на переходной линии в характеристическом треугольнике (2). Если обозначить через $\varphi(x)$ решение на характеристике BC , то в частном случае можно получить следующую связь между значением решения на переходной линии $\tau(x)$ и значением $v(x)$ его 1-й производной по y :

$$\tau(x) = \psi(x) + \gamma \int_x^1 \frac{v(y) dy}{(y-x)^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)\Gamma(2/3)}, \quad (5)$$

$$\text{где } \psi(x) = \frac{(1-x)^{5/6}}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\varphi(y) dy}{(1-y)^{1/2}(y-x)^{1/2}}, \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(1/6)}, \quad \gamma_2 = (3/4)^{1/2} \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)}.$$

Для случая указанной граничной задачи формула (5) имеет вид:

$$\tau(x) = \gamma \int_x^1 \frac{v(y) dy}{(y-x)^{1/2}} \quad \text{при } x > \alpha; \quad (6)$$

$$\tau(x) = \gamma \int_x^1 \frac{v(y) dy}{(y-x)^{1/2}} - \frac{(1-x)^{5/6}}{2\pi\gamma_1} \frac{d}{dx} \int_x^\alpha \frac{\varphi(y) dy}{(1-y)^{1/2}(y-x)^{1/2}} \quad \text{при } x < \alpha.$$

На отрезке $0 < x < \alpha$ будем аппроксимировать $\psi(x)$ линейной комбинацией функций $l_k(x)$, построенных следующим образом:

$$l_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < \frac{k}{m} \alpha; \\ 1, & \text{если } \frac{k}{m} \alpha < x < \frac{k+1}{m} \alpha; \\ 0, & \text{если } \frac{k+1}{m} \alpha < x < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k l_k(x). \quad (7)$$

Коэффициенты в (3) определяются, если воспользоваться уравнением (5). Входящие в уравнение (5) функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ получаются из (3) на основании (4) в виде

$$\tau(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin \pi p x, \quad \nu(x) = \lambda'(0) \sum_{p=1}^{\infty} a_p (\pi p)^{1/2} \sin \pi p x, \quad p = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5), получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p f_i(x) = \psi(x), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $f_i(x) = \omega(\pi i x)$, $\omega(x) = \sin x + \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_x^1 \frac{\sin y dy}{(x-y)^{1/2}}$.

В работе (3) доказано, что система функций $\{f_i(x)\}$ является линейно независимой и полной в классе функций с интегрируемым квадратом. Однако функции $f_i(x)$ попарно не ортогональны, поэтому будем искать коэффициенты a_p из условия аппроксимации в среднем

функции $\psi(x)$ линейной комбинацией $\bar{\psi}(x) = \sum_{p=1}^n a_p f_{ip}$, т. е. из условия

$$\int_0^1 [\bar{\psi}(x) - \psi(x)]^2 dx = \min. \quad \text{Если обозначить}$$

$$j_{ik}(\alpha) = \int_{\frac{k}{m}\alpha}^{\frac{k+1}{m}\alpha} f_i(x) dx, \quad f_{ip} = \int_0^1 f_i(x) f_p(x) dx,$$

то предыдущее условие приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^n f_{ip} a_p = \sum_{k=0}^{m-1} b_k j_{ik}(\alpha), \quad \text{откуда } a_p = \sum_{k=0}^{m-1} b_k t_{kp}(\alpha),$$

где t_{kp} определяются из системы уравнений

$$\sum_{p=1}^n f_{ip} t_{kp}(\alpha) = j_{ik}(\alpha).$$

Граничное условие на кривой третьего порядка имеет вид

$$\int_0^1 \{ (5y + 3\Lambda) M_x[\xi, x(y), y] + \\ + V^{-1/2}(\Lambda + y) (7y + \Lambda) M_y[\xi, x(y), y] \} \sum_{k=0}^{m-1} b_k \alpha_k(\xi) d\xi \equiv 0, \quad (10)$$

где

$$\alpha_k(\xi) = \sum_{p=1}^n t_{kp}(\alpha) \sin \pi p \xi,$$

$$M[\xi, x(y), y] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\pi^{1/2} n^{1/2} y) \sin \pi n \xi \sin \pi n x.$$

Если в (10) обозначить выражение в фигурных скобках через $T(\xi, y)$, то для определения b_k имеем следующую систему однородных алгебраических уравнений, в которой число неизвестных на единицу больше числа уравнений:

$$\sum_{k=0}^{m-1} b_k R_k(y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (11)$$

где

$$R_k(y_i) = \int_0^1 T(\xi, y_i) \alpha_k(\xi) d\xi.$$

Система уравнений (11) может быть решена с точностью до заданного постоянного множителя. Этот множитель определяется единственным образом, если использовать связь плоскости „годографа“ с плоскостью потока. Действительно, решение задачи получается в виде

$$Z(x, y) = b_0 \sum_{p=1}^n \bar{a}_p \lambda(\pi^{1/2} p^{1/2} y) \sin \pi p x, \quad \bar{a}_p = \frac{a_p}{b_0}.$$

Принимая расстояние KB за единицу, находим

$$b_0 = \frac{\pi^{1/2}}{\lambda'(0) \sum_{p=1}^n (-1)^p \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}}}.$$

Полученное решение позволяет найти любые величины, связанные с данными задачами.

Уравнение линии сильного разрыва в параметрическом виде:

$$x_1 = l_* \frac{b_0}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \lambda'(\pi^{1/2} p^{1/2} y) \cos \pi p [(y - \Lambda) \sqrt{-1/2}(\Lambda + y)] \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}},$$

$$y_1 = \frac{l_* b_0}{(\kappa + 1)^{3/2}} \sum_{p=1}^n \bar{a}_p \lambda(\pi^{1/2} p^{1/2} y) \sin [(y - \Lambda) \sqrt{-1/2}(\Lambda + y)].$$

Расстояние линии сильного разрыва от носика профиля определяется по формуле

$$x_1 = \frac{l_* b_0}{\pi^{1/2}} \sum_{p=1}^n \frac{\bar{a}_p}{p^{1/2}} \lambda'(\pi^{1/2} p^{1/2} y) \cos \pi p x,$$

в которую нужно подставить координаты точки D .

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность Л. В. Овсянникову, под руководством которого выполнена эта работа.

Постуило
18 X 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. В. Овсянников, Вести. ЛГУ, № 6 (1952). ² Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, 1947. ³ Л. В. Овсянников, ДАН, 91, № 3, 457 (1953).