

В. В. НЕМЫЦКИЙ

# МЕТОД ВРАЩАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ РАЗЫСКАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 IV 1954)

Некоторую замкнутую область  $G$   $n$ -мерного пространства назовем торовидной, если она получается из топологического тора или сферической окрестности окружности  $T$  путем исключения не более чем конечного числа областей, целиком погруженных в  $T$ . Торовидной областью, не совпадающей с тором, является, например, пространство, заключенное между двумя поверхностями торов. Каждой точке торовидной области можно приписать угловую координату, определяющую ту меридиональную поверхность, на которой лежит эта точка.

Определение 1. Мы скажем, что траектория  $\varphi(P, t)$  динамической системы  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , целиком погруженная в  $G$ , определяет некоторый колебательный режим относительно  $G$ , если: а)  $\varphi(P, t)$  устойчиво по Пуассону; б) существует такое число  $\tau_0 > 0$ , что за промежутков времени  $\tau_q \leq \tau_0$  точка  $q = \varphi(P, t)$  один и только один раз пересечет каждую меридиональную поверхность.

Режим, описываемый траекторией, удовлетворяющей условию б), но не удовлетворяющей условию а), назовем асимптотическим к колебательному.

Определение 2. Функцию

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

назовем вращающей функцией Ляпунова относительно замкнутой области  $\bar{G}$ , если выполнены следующие условия: 1)  $F_1$  и  $F_2$  непрерывно дифференцируемые функции в  $\bar{G}$ ; 2) уравнение  $F_1 - CF_2 = 0$ ,  $-\infty \leq C \leq +\infty$ , представляет собой уравнение пучка поверхностей, ось которого не проходит через точки  $\bar{G}$ , причем поверхности  $V = +\infty$  и  $V = -\infty$  совпадают с поверхностью  $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ; 3) каждая поверхность пучка  $F_1 - CF_2 = 0$  пересекает  $\bar{G}$ ; 4) каждая точка  $\bar{G}$  принадлежит одной из поверхностей пучка.

Рассмотрим производную от  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , взятую в силу системы уравнений  $dx_i/dt = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т. е. рассмотрим выражение

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial x_i} F_1 \right) f_i}{F_2^2(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Принимая во внимание, что  $F_1/F_2 = C^*$ , это выражение можно переписать в форме

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_2 - \frac{\partial F_2}{\partial x_i} F_1 \right) f_i}{F_1^2(x_1, x_2, \dots, x_n)} C^2 = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) C^2.$$

Кроме того отдельно рассмотрим значение  $dV/dt$  на поверхности  $V=0$ , т. е. на поверхности  $F_1=0$ . На этой поверхности  $dV/dt$  имеет вид

$$\left( \frac{dV}{dt} \right)_{C=0} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_i} f_i}{F_2} = B(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Пользуясь этими обозначениями, формулируем теорему.

**Теорема 1.** Если через все граничные точки торовидной замкнутой области  $\bar{G}$ , не содержащей особых точек, все траектории системы входят внутрь  $G$  и если относительно  $\bar{G}$  существует вращающаяся функция Ляпунова  $V=C$ , для которой  $|\Gamma| > a^2 > 0$  и  $|B| > a^2 > 0$  для точек  $\bar{G}$ , то  $\bar{G}$  содержит колебательный режим.

Рассмотрим произвольную внутреннюю точку  $P_0$  области  $G$ , лежащей на поверхности  $V=0$  при  $t=0$ ; так как, по условию теоремы,  $\left( \frac{dV}{dt} \right)_{C=0} > a^2 > 0$ , то фазовая точка при  $t > 0$  не может оставаться на поверхности  $V=0$  и перейдет на поверхности, соответствующие большим значениям  $C$ ; так как для всякого  $C$ , отличного от нуля,  $\left( \frac{dV}{dt} \right)_C > a^2 C^2$ , то траектория при росте  $t$  будет переходить к большим значениям  $C$ , т. е. вдоль траектории  $C$  можно считать монотонной функцией  $t$  и, следовательно, вдоль траектории  $\frac{dV}{dt} = \frac{dC}{dt}$ .

Покажем, что через конечное время траектория выйдет на поверхность  $C = +\infty$ . Этот промежуток времени мы найдем из равенства

$$T = \int_0^T dt = \int_0^\infty \frac{dC}{dV/dt}.$$

Имеем

$$T = \int_0^\delta \frac{dC}{dV/dt} + \int_\delta^\infty \frac{dC}{dV/dt},$$

где  $\delta$  столь мало, что для  $0 < C < \delta$   $dV/dt > \gamma_\delta > 0$ ; отсюда

$$\int_0^\delta \frac{dC}{dV/dt} \leq \frac{\delta}{\gamma_\delta}.$$

Оценим второй интеграл:

$$\int_\delta^\infty \frac{dC}{dV/dt} = \int_\delta^\infty \frac{dC}{|\Gamma| C^2} < \frac{1}{a^2} \int_\delta^\infty \frac{dC}{C^2} = \frac{1}{a^2} \left[ -\frac{1}{C} \right]_\delta^\infty = \frac{1}{a^2 \delta}.$$

Итак,

$$T \leq \frac{\delta}{\gamma_\delta} + \frac{1}{a^2 \delta}.$$

\* Вдоль интегральной кривой  $C$  можно рассматривать как некоторую функцию от  $t$ .

Эта же оценка имеет место и для интервалов изменения  $C$  от  $+\infty$  до 0, от 0 до  $-\infty$  и от  $-\infty$  до 0.

Если теперь ввести угловую координату  $\varphi$  при помощи формулы  $\operatorname{tg} \varphi = C$ , то ясно, что фазовая точка вернется на исходную поверхность, если  $\varphi$  перейдет от 0 до  $2\pi$ , т. е.  $C$  перейдет от 0 до  $+\infty$ , от  $-\infty$  до 0, от 0 до  $-\infty$  и от  $-\infty$  до 0. Так как проведенная нами оценка годится для каждого из этих интервалов изменения  $C$ , то через время  $\tau_0 \leq 4\left(\frac{\delta}{\gamma\delta} + \frac{1}{a^2\delta}\right)$  фазовая точка вернется на исходную поверхность.

Таким образом, всякая траектория, начинающаяся в  $G$  на поверхности  $C=0$  будет описывать либо колебательный либо асимптотический к колебательному режим. На основании общих теорем заключаем, что внутри  $\bar{G}$  будет рекуррентная траектория, очевидно, отличная от особой точки. Эта рекуррентная траектория будет уже удовлетворять и условию а) и условию б). Числа  $D^*$  и  $2\pi/\tau_0$  будут характеризовать амплитуду и частоту найденного колебательного режима.

Пример. Рассматривается система

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + \varepsilon x^2 P_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \varepsilon x^2 Q_1(x, y), \\ \frac{dz}{dt} &= -z + R(x, y),\end{aligned}$$

$P_1, Q_1, R(x, y)$  непрерывны в торовидной области  $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $0 \leq z \leq a$ .

Если выполнены условия

$$\begin{aligned}0 < R(x, y) < a & \text{ для } r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2; \\ xP + yQ > 0 & \text{ для } x^2 + y^2 = r^2; \\ xP + yQ < 0 & \text{ для } x^2 + y^2 = R^2,\end{aligned}$$

то для тех  $\varepsilon$ , для которых в торовидной области справедливы неравенства

$$-1 + \varepsilon x^2 Q < 0, \quad \frac{r^2}{R^2} + \varepsilon x^2 \frac{|xQ - yP|}{R^2} > 0,$$

в выбранной торовидной области будет колебательный режим. На этом пути легко построить примеры систем, имеющих наперед заданное число геометрически различных колебательных режимов.

Определение 3. Назовем замкнутое множество  $S$  локальным сечением потока траекторий, если существует такое число  $T$ , не зависящее от выбора точки  $S$ , что всякая дуга  $f(P, -T, +T)$  траектории  $\varphi(P, t)$ , выходящая из  $S$  при  $t=0$ , имеет с  $S$  только одну общую точку.

Используя теорему Брауэра о существовании неподвижной точки преобразования, можно установить теорему:

Теорема 2. Пусть  $G$  — торовидная область, пусть она имеет сечение  $S^{(n-1)}$ , являющееся элементом размерности  $n-1$ , и пусть этот же элемент является локальным сечением потока траекторий, проходящего через  $S^{(n-1)}$ . Если каждая траектория  $\varphi(P, t)$ , начинающаяся из точек  $S^{(n-1)}$ , для некоторого значения  $t = \omega$  снова возвращается на  $S^{(n-1)}$ , то внутри  $G$  имеется периодическое решение.

\* Диаметр области  $St$ .

На основании теорем 2 и 1 легко обнаружить существование периодического решения для динамической системы рассмотренного примера. Заметим, что, исходя из этого принципа, колебательный режим был найден в статье Рауха (1). Это же рассмотрение по существу дела лежит в основе примеров, разобранных в известной работе А. А. Андропова, Н. Н. Баутина и Г. С. Горелика (2). Наконец, заметим, что для исследования систем на фазовой плоскости рассмотренные теоремы не нужны, так как на плоскости наличие кольцевой области, в которую входят все траектории, уже достаточно для существования периодического решения, в то время как для пространства, как показал пример Фуллера (3), наличие торообразной области, в которую входят все траектории, не обеспечивает существования ни периодических решений в этой области ни колебательного режима в нашем смысле.

Московский государственный  
университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
25 III 1954

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> L. L. Rauch, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton, 1950, p. 39—88. <sup>2</sup> А. А. Андронов, Н. Н. Баутин, Г. С. Горелик, Автомат. и телемех., 7, № 1, 15 (1946). <sup>3</sup> F. V. Fuller, Ann. of Math., 56, No. 3 (1952).