

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 IV 1954)

1. В работах ^(1,2) даны некоторые теоремы, позволяющие гарантировать определенный интервал существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям, и оценить погрешность тем или иным способом полученного приближенного решения такой системы. Величина интервала существования и оценка приближения, которые дают эти теоремы, существенно зависят от выбора некоторой области $(n+1)$ -мерного пространства и некоторой матрицы n -го порядка (область G^* и матрица $U(t)$ в обозначениях работ ^(1,2)). По поводу выбора этой области и этой матрицы в ^(1,2) высказаны лишь самые общие соображения, так что пользоваться результатами этих работ затруднительно. Теоремы настоящей работы могут быть выведены из ^(1,2), но более просты для применения.

2. Примем все определения и обозначения из ⁽¹⁾, пп. 1 и 2. Обозначим через R^{n+1} вещественное евклидово пространство переменных $t, x_1, \dots, x_n$

3. Пусть даны:

1) Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_v}{dt} = f_v(t, x_1, \dots, x_n), \quad v = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где функции f_v принимают вещественные значения и непрерывны вместе со своими первыми частными производными по x -ам в некоторой области $G \subset R^{n+1}$.

2) Точка $(t_0, x^0) \equiv (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in G$.

3) Система функций

$$X_1(t), \dots, X_n(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

принимающих вещественные значения, непрерывных и имеющих кусочно-непрерывные производные при $t_0 \leq t \leq T$.

4) Матрица $U(t)$, неособенная при $t_0 \leq t \leq T$, каждый элемент которой есть непрерывная и имеющая кусочно-непрерывную производную функция на $[t_0, T]$.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество тех $t \in [t_0, T]$, при которых существуют $\frac{dU(t)}{dt}, \frac{dX_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dX_n(t)}{dt}$. Очевидно, все точки интервала $[t_0, T]$, кроме, может быть, конечного числа их, принадлежат $\mathfrak{T}$.

Положим при $v = 1, \dots, n, t \in \mathfrak{T}$

$$\tau_v(t) \equiv \frac{dX_v(t)}{dt} - f_v[f, X_1(t), \dots, X_n(t)]. \quad (3)$$

Положим при $(t, x) \in G$, $\nu, \mu = 1, \dots, n$

$$f_{\nu\mu}(t, x) \equiv f_{\nu\mu}(t, x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial f_{\nu}(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{\mu}}$$

и определим матрицы $J[t, x]$ и $Q[t, x]$ формулами

$$\{J[t, x]\}_{\nu\mu} \equiv f_{\nu\mu}(t, x);$$

$$Q[t, x] \equiv U^{-1}(t) J[t, x] U(t) - U^{-1}(t) \frac{dU(t)}{dt};$$

$$\nu, \mu = 1, \dots, n; \quad t \in \mathfrak{T}; \quad (t, x) \in G.$$

Положим еще

$$\vec{\zeta}(t) \equiv U^{-1}(t) \vec{\tau}(t) \quad \text{при } t \in \mathfrak{T}; \quad (4)$$

$$\vec{\Delta}^0 \equiv X(t_0) - x^0; \quad (5)$$

$$\vec{\vartheta}^0 \equiv U^{-1}(t_0) \vec{\Delta}^0. \quad (6)$$

Обозначим через $x(t)$ решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$. Это решение мыслится продолженным на максимальный возможный интервал оси t . Этот интервал обозначим I . Подчеркнем, что символ (t, x) означает произвольную точку в R^{n+1} , символ $(t, x(t))$ — точку на интегральной кривой решения $x(t)$.

Пусть $\gamma_X(t)$ есть вещественная, суммируемая на $[t_0, T]$ функция, такая, что

$$\operatorname{Re} \{Q[t, X(t)]\}_{\nu\nu} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^n |Q[t, X(t)]_{\nu\mu}| \leq \gamma_X(t)$$

при $t \in \mathfrak{T}$, $\nu = 1, \dots, n$. Положим при $t_0 \leq t \leq T$

$$\Phi_X(t) \equiv \|\vec{\vartheta}^0\|_I \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \gamma_X(u) du \right] + \int_{t_0}^t \|\vec{\zeta}(\xi)\|_I \cdot \exp \left[\int_{\xi}^t \gamma_X(u) du \right] d\xi.$$

Пусть множество $H \subset R^{n+1}$ таково, что при $t \in [t_0, T] \cap I$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем $(t, \alpha X(t) + (1 - \alpha)x(t)) \in H$.

4. Теорема 1. Пусть вещественные числа A и T^* и вещественная функция $q(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $A > 1$, $t_0 < T^* \leq T$;

б) $G^* \equiv \mathcal{G}_{(t, x)} \{t_0 \leq t \leq T^*, \|x - X(t)\|_I \leq A \|U(t)\|_I \Phi_X(t)\} \subset G$;

в) если $(t, x) \in G^* \cap H$, то

$$\|U^{-1}(t) \{J[t, x] - J[t, X(t)]\} U(t)\|_I \leq q(t) \|x - X(t)\|_I;$$

г) $q(t)$ непрерывна на $[t_0, T^*]$ и $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{T^*} q(\xi) \|U(\xi)\|_I \Phi_X(\xi) d\xi < \frac{A-1}{A}$.

Тогда $x(t)$ существует при $t_0 \leq t \leq T^*$ и

$$\|X(t) - x(t)\|_I \leq \|U(t)\|_I \Phi_X(t) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t q(\xi) \|U(\xi)\|_I \Phi_X(\xi) d\xi \right\}^{-1}$$

при $t_0 \leq t \leq T^*$.

5. Пусть $\vec{\Delta}^0$ — некоторый вектор, не обязательно определенный формулой (5). Все прочие обозначения пп. 1—3 сохраним; те из введенных в п. 3 величин, которые определяются через $\vec{\Delta}_0$, конечно приобретут, вообще говоря, новое значение.

Пусть $\vec{\eta}(t)$, $t_0 \leq t \leq T^*$ означает решение системы

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = J[t, \mathbf{x}(t)] \vec{\eta} + \vec{\tau}(t)$$

при начальном условии $\vec{\eta}(t_0) = \vec{\Delta}^0$. Положим

$$\vec{x}(t) \equiv \mathbf{X}(t) - \vec{\eta}(t) \quad \text{при } t_0 \leq t \leq T^*;$$

$$\vec{\Theta}^0 \equiv U^{-1}(t_0)(\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{x}^0 - \vec{\Delta}^0).$$

Пусть множество $\mathfrak{F} \subset R^{n+1}$ таково, что при $t \in [t_0, T] \cap I$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ имеем $(t, \alpha \vec{x}(t) + (1 - \alpha) \mathbf{x}(t)) \in \mathfrak{F}$.

6. Теорема 2. Пусть вещественные числа A и T^* и вещественные функции $q(t)$ и $\gamma(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $A > 1$, $t_0 < T^* \leq T$;

б) $G^* \equiv \mathcal{G}_{(t, \mathbf{x})} \{t_0 \leq t \leq T^*, \|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_I \leq \|U(t)\|_I \Phi_X(t)\} \subset G$;

в) если $t \in [t_0, T^*]$ и при некотором α , $0 \leq \alpha \leq 1$, имеем $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{X}(t) + (1 - \alpha) \vec{x}(t)$, то

$$\|U^{-1}(t) \{J[t, \mathbf{x}] - J[t, \mathbf{X}(t)]\} U(t)\|_I \leq q(t) \|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_I;$$

г) $q(t)$ непрерывна при $t_0 \leq t \leq T^*$ и, если положить

$$\begin{aligned} \Psi_X(t) \equiv & \|\vec{\Theta}^0\|_I \cdot \exp \left[\int_{t_0}^t \gamma_X(\alpha) d\alpha + \int_{t_0}^t q(\alpha) \|U(\alpha)\|_I \Phi_X(\alpha) d\alpha \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t q(\xi) \|U(\xi)\|_I [\Phi_X(\xi)]^2 \cdot \exp \left[\int_{\xi}^t \gamma_X(\alpha) d\alpha + \int_{\xi}^t q(\alpha) \|U(\alpha)\|_I \Phi_X(\alpha) d\alpha \right] d\xi \end{aligned}$$

при $t_0 \leq t \leq T^*$, то

$$G^{**} \equiv \mathcal{G}_{(t, \mathbf{x})} \{t_0 \leq t \leq T^*, \|\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)\|_I \leq \|U(t)\|_I [\Phi_X(t) + A \Psi_X(t)]\} \subset G,$$

и, если $(t, \mathbf{x}) \in G^{**} \cap \mathfrak{F}$, то

$$\|U^{-1}(t) \{J[t, \mathbf{x}] - J[t, \vec{x}(t)]\} U(t)\|_I \leq q(t) \|\mathbf{x} - \vec{x}(t)\|_I;$$

д) $q(t)$ непрерывна при $t_0 \leq t \leq T^*$ и

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{T^*} q(\alpha) \|U(\alpha)\|_I \Psi_X(\alpha) d\alpha < \frac{A-1}{A}.$$

Тогда $\mathbf{x}(t)$ существует при $t_0 \leq t \leq T^*$ и

$$\|\vec{x}(t) - \mathbf{x}(t)\|_I \leq \|U(t)\|_I \Psi_X(t) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t q(\alpha) \|U(\alpha)\|_I \Psi_X(\alpha) d\alpha \right\}^{-1}$$

при $t_0 \leq t \leq T^*$.

7. Если $n = 1$ (система состоит из одного уравнения), то следует брать $U(t) \equiv 1$. Если $n > 1$, то, повидимому, выгодно брать $U(t)$ так, чтобы недиагональные элементы матрицы $Q[t, \mathbf{X}(t)]$ были малы.

8. Теорема 1 проще теоремы 2, но теорема 2, вообще говоря, сильнее.

9. Если нам ничего неизвестно об интервале существования решения $x(t)$ и расположении соответствующей этому решению интегральной кривой в R^{n+1} , то полагаем $H = R^{n+1}$ и применяем теорему 1. Однако же может случиться, что из каких-то соображений мы в состоянии найти H такое, что теорема 1 с этим H даст лучший результат, чем с $H = R^{n+1}$. Таким образом, теорема 1 может применяться и при отсутствии какой-либо априорной информации о решении $x(t)$, но в соединении с такой информацией дает, вообще говоря, лучший результат, чем без нее.

Аналогичное замечание справедливо для теоремы 2 и §.

10. Если желать использовать теорему 2 только для гарантирования определенного интервала существования $x(t)$, то нет необходимости вычислять $\mathfrak{X}(t)$ и можно положить $\mathfrak{S} = R^{n+1}$.

11. Аналогичные теоремы справедливы и для II и III норм матриц и векторов.

Поступило
17 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Лозинский, ДАН, 92, № 2 (1953). ² С. М. Лозинский, ДАН, 94, № 1 (1954).