

МАТЕМАТИКА

А. Е. ЛИБЕР

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 IV 1954)

1. Аксиоматика. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая полугруппа (ассоциативная система). Элемент $g \in \mathfrak{G}$ называют обобщенно обратным (¹), если в полугруппе $\mathfrak{G}$ существует такой элемент $\bar{g}$, что $g\bar{g}g = g$ и $\bar{g}g\bar{g} = \bar{g}$. Элемент $\bar{g}$ называют тогда обобщенно обратным для g . Очевидно, что исходный элемент g является обобщенно обратным для $\bar{g}$. В. В. Вагнер (¹) определил обобщенные группы как такие полугруппы, в которых выполняются дополнительно две аксиомы: 1) всякий элемент полугруппы обобщенно обратим; 2) любые два идемпотентных элемента полугруппы коммутируют между собой. Из этих аксиом вытекает, в частности, единственность обобщенно обратного элемента для данного элемента (¹). Однако требование единственности обобщенно обратного элемента может заменить вторую аксиому В. В. Вагнера в силу следующей теоремы:

Теорема 1. *Если в полугруппе $\mathfrak{G}$ каждый элемент обладает единственным обобщенно обратным элементом, то все идемпотентные элементы полугруппы $\mathfrak{G}$ коммутируют между собой.*

Доказательство. Пусть i, j — какие-либо два идемпотентных элемента полугруппы $\mathfrak{G}$. Положим $ij = a$. Очевидно, $ia = a$ и $aj = a$. Пусть $\bar{a}$ — обобщенно обратный элемент для a . Тогда имеем $a\bar{a}a = a$ и $\bar{a}a\bar{a} = \bar{a}$, следовательно, элемент $\bar{a}$ является также обобщенно обратным для a и, в силу единственности обобщенно обратного элемента, получаем $\bar{a} = a$. Аналогично доказываем, что $\bar{a}i = a$. Поэтому $aa = aij = aj$, откуда $a = aaa = a\bar{a}a = a\bar{a}$, следовательно, a является идемпотентным элементом полугруппы $\mathfrak{G}$. Очевидно, для идемпотентного элемента обобщенно обратным служит он сам, вместе с тем элемент a является обобщенно обратным для a ; в силу единственности обобщенно обратного элемента получаем $\bar{a} = a$, отсюда $\bar{a}i = ja = a$, в согласии с определением элемента a последнее равенство можно переписать так: $iji = jij = ij$. Аналогично, отправляясь от элемента $b = ji$, мы докажем равенства $ib = bj = b$ или $iji = jij = ji$, откуда $ij = ji$.

В силу доказанной теоремы две аксиомы В. В. Вагнера могут быть заменены требованием существования и единственности обобщенно обратного элемента для каждого элемента полугруппы. Отсюда получается следующее эквивалентное определение обобщенной группы: обобщенной группой называется такая полугруппа, в которой для каждого элемента существует единственный обобщенно обратный элемент.

Элемент g полугруппы $\mathfrak{G}$ называют полуобратным, если существует такой элемент $g_1 \in \mathfrak{G}$, что $gg_1g = g$. Тьеррен показал (²), что из полуобратимости следует обобщенно-обратимость. Действитель-

но, из предыдущего равенства вытекает, что элемент $\bar{g} = g_1 g g_1$ будет обобщенно обратным для g . Теперь аксиомы В. В. Вагнера для обобщенной группы можно заменить следующими двумя:

а) всякий элемент полугруппы полуобратим;

б) из $g g_1 g = g$ и $g g_2 g = g$ следует всегда $g_1 g g_1 = g_2 g g_2$.

Обобщенная группа с одним идемпотентным элементом является просто группой. Поэтому, если заменить аксиому б) более сильным требованием:

б*) из $g g_1 g = g$ и $g g_2 g = g$ всегда следует $g_1 = g_2$, то обобщенная группа становится просто группой. Действительно, из аксиомы б*) непосредственно следует б), поэтому аксиомы а) и б*) прежде всего приводят к обобщенной группе. Пусть i и j — какие-либо ее идемпотентные элементы, положим $a = ij$. Имеем, очевидно, $aia = a$ и также $aja = a$, следовательно, в силу аксиомы б*), $i = j$. Поэтому группа может быть определена как такая полугруппа, в которой для всякого элемента g уравнение $gxg = g$ имеет единственное решение.

2. Простейшие обобщенные группы. Будем обозначать через I множество всех идемпотентных элементов обобщенной группы $\mathfrak{G}$, а через g^{-1} — обобщенно обратный элемент для элемента $g \in \mathfrak{G}$. Очевидно, элементы gg^{-1} и $g^{-1}g$ являются идемпотентными, однако в общем случае $gg^{-1} \neq g^{-1}g$. Поэтому условие

$$\text{для любого } g \in \mathfrak{G} \text{ имеет место } gg^{-1} = g^{-1}g \quad (1)$$

выделяет особый класс обобщенных групп, которые мы будем называть простейшими обобщенными группами. Такие обобщенные группы рассматривал Клиффорд ⁽³⁾, который описал их строение и, в частности, показал, что условие (1) может быть заменено требованием

$$\text{для любых } g \in \mathfrak{G} \text{ и } i \in I \text{ имеет место } gi = ig. \quad (2)$$

Мы дадим простое доказательство этой теоремы.

Теорема 2. Для обобщенной группы из условия (1) следует условие (2) и обратно.

Доказательство. Заметим, что если $g \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{G}$, то $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, и если $i \in I$, то $i^{-1} = i$. Теперь пусть $g \in \mathfrak{G}$ и $i \in I$; если условие (1) выполнено, то, применив его к элементу gi , получим $(gi)(gi)^{-1} = (gi)^{-1}(gi)$ или $gig^{-1} = ig^{-1}gi$. Так как $g^{-1}g$ коммутирует с i , то $gig^{-1} = ig^{-1}gi = ig^{-1}g = igg^{-1}$ (в силу (1)). Умножив последнее равенство на g , получаем $gig^{-1}g = ig$. С другой стороны, $gig^{-1}g = gg^{-1}gi = gi$, поэтому $ig = gi$, и из условия (1) следует (2). Пусть, обратно, выполнено условие (2). Полагая в равенстве (2) $i = g^{-1}g$ или $i = gg^{-1}$, получим два равенства:

$$\text{а) } g^{-1}gg = g, \quad \text{б) } ggg^{-1} = g. \quad (3)$$

Но тогда $g^{-1}ggg^{-1} = (g^{-1}gg)g^{-1} = gg^{-1}$ и, с другой стороны, $g^{-1}ggg^{-1} = g^{-1}(ggg^{-1}) = g^{-1}g$, откуда следует $gg^{-1} = g^{-1}g$, т. е. условие (1).

Теорема 3. Для обобщенной группы условие (1) эквивалентно любому одному из условий (3).

Доказательство. Выше мы показали, что (3) следует из (1). Пусть теперь выполнено условие (3а). Применяя это условие к элементу g^{-1} , получим $gg^{-1}g^{-1} = g^{-1}$; беря обобщенно обратный элемент для левой и правой частей этого равенства, получим также $ggg^{-1} = g$. Итак, из (3а) следует (3б), но при доказательстве теоремы 2 мы видели, что оба условия (3) влекут (1). Аналогично покажем, что из (3б) следует (1).

3. Особые идемпотентные элементы. Множество I идемпотентных элементов обобщенной группы $\mathfrak{G}$ является полугруппой от-

носителем операции в $\mathfrak{G}$ и даже обобщенной группой. Пусть i_0 является нулевым элементом полугруппы I , т. е.

$$\text{для любого } i \in I \text{ имеет место } ii_0 = i_0i = i_0. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_0$ множество таких элементов $g \in \mathfrak{G}$, для которых выполняется равенство $g^{-1}g = i_0$.

Теорема 4. *Множество $\mathfrak{G}_0$ образует группу, единицей которой служит элемент i_0 .*

Доказательство. Из определения множества $\mathfrak{G}_0$ выводим прежде всего для любого $g \in \mathfrak{G}_0$ равенство $gi_0 = g$. Пусть i — любой идемпотентный элемент; умножая предыдущее равенство на i , мы получаем, согласно условию (4), $gi = gi_0i = gi_0 = g$. Итак, для любого $g \in \mathfrak{G}_0$ и любого $i \in I$ имеем $gi = g$. Пусть $g \in \mathfrak{G}_0$; элемент $g^{-1}i_0g$, очевидно, является идемпотентным, а поэтому $g(g^{-1}i_0g) = g$. С другой стороны, $gg^{-1}i_0g = i_0g$, ибо $gg^{-1} \in I$. Итак, если $g \in \mathfrak{G}_0$, то $gi_0 = i_0g = g$, т. е. для элементов из множества $\mathfrak{G}_0$ элемент i_0 действительно служит единицей. Отсюда, если $g \in \mathfrak{G}_0$, то $i_0(gg^{-1}) = (i_0g)g^{-1} = gg^{-1}$, но с другой стороны, $i_0(gg^{-1}) = i_0$, ибо $gg^{-1} \in I$. Поэтому $gg^{-1} = i_0$ и, следовательно, если $g \in \mathfrak{G}_0$, то также $g^{-1} \in \mathfrak{G}_0$. Осталось показать, что $\mathfrak{G}_0$ замкнуто относительно операции умножения. Пусть $g \in \mathfrak{G}_0$, $h \in \mathfrak{G}_0$, тогда $(gh)^{-1}gh = h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}i_0h = h^{-1}h = i_0$ и $gh \in \mathfrak{G}_0$. Теорема доказана полностью.

Теорема 5. *Для любого элемента $g \in \mathfrak{G}$ элементы gi_0 и i_0g принадлежат группе $\mathfrak{G}_0$.*

Доказательство. $(gi_0)^{-1}gi_0 = i_0g^{-1}gi_0 = i_0$, ибо $g^{-1}g \in I$; следовательно, элемент $gi_0 \in \mathfrak{G}_0$. Аналогично, $(i_0g)(i_0g)^{-1} = i_0$, следовательно, элемент $(i_0g)^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{G}_0$, но, по теореме 4, также и элемент $((i_0g)^{-1})^{-1} = i_0g$ будет принадлежать $\mathfrak{G}_0$.

Следствие 1. Группа $\mathfrak{G}_0$ является идеалом обобщенной группы $\mathfrak{G}$. Действительно, если $g \in \mathfrak{G}_0$ и $h \in \mathfrak{G}$, то $gh = (gi_0)h = g(i_0h)$, но $i_0h \in \mathfrak{G}_0$, поэтому $gh \in \mathfrak{G}_0$. Точно так же покажем, что $hg \in \mathfrak{G}_0$.

Следствие 2. Нулевой элемент полугруппы I идемпотентов обобщенной группы $\mathfrak{G}$ коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{G}$.

Действительно, если $h \in \mathfrak{G}$, то $hi_0 \in \mathfrak{G}_0$ (теорема 5), следовательно, $i_0hi_0 = hi_0$. Точно так же и $i_0h \in \mathfrak{G}_0$, поэтому $i_0hi_0 = i_0h$; сравнивая с предыдущим равенством, получим $hi_0 = i_0h$.

Заметим, что нулевой элемент полугруппы I всегда существует, если I состоит только из конечного числа элементов. В самом деле, в этом случае произведение всех идемпотентных элементов дает элемент $i_0 \in I$, обладающий свойством (4).

В качестве второго особого элемента полугруппы I рассмотрим единицу этой полугруппы, т. е. такой идемпотентный элемент e , который удовлетворяет условию $ie = ei = i$ для любого $i \in I$.

Теорема 6. *Единица множества идемпотентных элементов обобщенной группы $\mathfrak{G}$ является также единицей этой обобщенной группы.*

Доказательство. Пусть $g \in \mathfrak{G}$; тогда $ge = (gg^{-1}g)e = g(g^{-1}ge) = gg^{-1}g = g$, ибо $gg^{-1} \in I$. Аналогично покажем, что $eg = g$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{G}_e$, состоящее из таких элементов $g \in \mathfrak{G}$, которые удовлетворяют условию $g^{-1}g = e$.

Теорема 7. *Множество $\mathfrak{G}_e$ образует полугруппу.*

Доказательство. Пусть g и h — элементы из $\mathfrak{G}_e$; тогда $g^{-1}g = e$ и $h^{-1}h = e$, поэтому $(gh)^{-1}gh = h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}eh = h^{-1}h = e$, следовательно, $gh \in \mathfrak{G}_e$.

В общем случае полугруппа $\mathfrak{G}_e$ не будет являться группой, ибо из $g^{-1}g = e$, вообще говоря, не следует $gg^{-1} = e$, а поэтому из $g \in \mathfrak{G}_e$ не следует также $g^{-1} \in \mathfrak{G}_e$. Однако справедлива следующая теорема:

Теорема 8. Если обобщенная группа $\mathfrak{G}$ имеет единицу e и только конечное множество идемпотентных элементов, то $\mathfrak{G}_e$ является группой.

Доказательство. Достаточно показать (в силу теоремы 7), что из $g^{-1}g = e$ вытекает также $gg^{-1} = e$. Пусть $g^{-1}g = e$, рассмотрим идемпотентные элементы $i_k = g^k g^{-k}$; так как, по предположению, множество I конечно, то среди элементов i_k будут повторения, например $g^n g^{-n} = g^m g^{-m}$ при $n > m$. Умножая последнее равенство справа на g^m и слева на g^{-m} , получим $g^q g^{-q} = e$ ($q = n - m$), ибо из $g^{-1}g = e$, очевидно, следует $g^{-k} g^k = e$. Если $q = 1$, то все доказано, если же $q > 1$, то равенство $g^q g^{-q} = e$ умножим слева на $g^{-(q-1)}$ и справа на g^q , и в результате получим $gg^{-1} = e$.

Из доказанных выше предложений вытекают также следующие две теоремы:

Теорема 9. Обобщенная группа с двумя идемпотентными элементами всегда является простейшей.

Доказательство. Так как идемпотентных элементов конечное число, то один из них есть нулевой элемент полугруппы I , в таком случае второй идемпотентный элемент будет единицей полугруппы I , а вместе с тем он будет единицей и для $\mathfrak{G}$ (теорема 6). Нулевой элемент полугруппы I коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{G}$ (следствие 2 теоремы 5), точно так же коммутирует со всеми элементами из $\mathfrak{G}$ и единица. Таким образом, выполнено условие (2) и обобщенная группа $\mathfrak{G}$ является простейшей.

Теорема 10. Если обобщенная группа $\mathfrak{G}$ с тремя идемпотентными элементами обладает единицей, то она является простейшей.

Доказательство. Так как $\mathfrak{G}$ обладает только тремя идемпотентными элементами, среди которых есть единица, то множество I состоит из элементов e, i_0, j , где e — единица, i_0 — нулевой элемент полугруппы I и j — третий идемпотентный элемент, отличный от e и i_0 . Мы видели, что из $g^{-1}g = i_0$ следует $gg^{-1} = i_0$ (теорема 4), но тогда $gg^{-1} = i_0$ означает, что $(g^{-1})^{-1}g^{-1} = i_0$ и влечет $g^{-1}(g^{-1})^{-1} = i_0$, т. е. $g^{-1}g = i_0$. Точно так же, ввиду конечности числа идемпотентных элементов, из $g^{-1}g = e$ следует $gg^{-1} = e$, а поэтому и из $gg^{-1} = e$ следует $g^{-1}g = e$. Отсюда обязательно из $g^{-1}g = j$ следует $gg^{-1} = j$ и обратно. Было бы $g^{-1}g = j$ и $gg^{-1} = e$ (или $gg^{-1} = i_0$), то, по сказанному выше, мы получили бы также $g^{-1}g = e$ (или $g^{-1}g = i_0$), откуда $j = e$ (или $j = i_0$), а это противоречит условию, что j есть третий идемпотентный элемент, отличный от e и от i_0 . Таким образом, оказывается выполненным условие (1), и $\mathfrak{G}$ является простейшей обобщенной группой.

Существуют обобщенные группы с тремя идемпотентными элементами, не являющиеся простейшими. Однако можно показать, что для таких обобщенных групп все элементы удовлетворяют условию $g^{-1}gg = ggg^{-1}$, которое является некоторым ослаблением условий (3).

Поступило
9 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Вагнер, Матем. сборн., 32 (74), в. 3, 545 (1953). ² G. Thierrin, C. R., 234, 33 (1952). ³ A. H. Clifford, Ann. of Math., 42, 1037 (1941).