

М. Г. КРЕЙН

**ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДАЮЩИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IV 1954)

1. Пусть $L(s, t)$ ($0 \leq s, t < R$) — некоторое непрерывное, вообще говоря, комплекснозначное ядро. Обозначим через I_L множество всех a ($0 \leq a < R$), для которых интегральное уравнение

$$g(t) + \int_0^a L(t, s) g(s) ds = 1 \quad (1)$$

имеет единственное решение. Очевидно, I_L по выбрасывании из него точки 0 есть открытое множество, содержащее некоторый интервал $(0, \delta)$. Решение $g(t; a)$ уравнения (1) при любом $a \in I_L$ можно представить в виде:

$$g(t; a) = 1 - \int_0^a \Gamma_a(t, s) ds \quad (0 \leq t \leq a), \quad (2)$$

где $\Gamma_a(t, s)$ — резольвента, определяемая уравнением

$$\Gamma_a(t, s) = L(t, s) - \int_0^a L(t, r) \Gamma_a(r, s) dr \quad (0 \leq s, t \leq a). \quad (3)$$

Из (3) легко получается формула для производной:

$$\partial \Gamma_a(t, s) / \partial a = -\Gamma_a(a, s) \Gamma_a(t, a) \quad (a \in I_L, 0 \leq t, s \leq a), \quad (4)$$

которая в соединении с (2) дает

$$\partial g(t; a) / \partial a = -\Gamma_a(t, a) g(a, a). \quad (5)$$

2. Пусть теперь $L(t, s) = H(|t - s|)$ ($0 \leq t, s \leq R$), где $H(t)$ ($0 \leq t < 2R$) — какая-либо непрерывная функция. В этом случае

$$\Gamma_a(t, s) = \Gamma_a(s, t) = \Gamma_a(a - t, a - s), \quad g(t; a) = g(a - t; a), \quad (6)$$

$$dg(a; a) / da = dg(0; a) / da = -\Gamma_a(0, a) g(a; a). \quad (7)$$

Так как $g(a; a) \rightarrow 1$ при $a \rightarrow 0$, то при достаточно малых $a > 0$

$$g(a; a) = \exp \left(- \int_0^a \Gamma_s(0, s) ds \right) > 0. \quad (8)$$

Если $I_L[0, R)$, то это соотношение будет верно для всех $a \in [0, R)$.

Нетрудно показать, что теперь функция $g(t; a)$ ($0 \leq t \leq a$; $a \in I_L$) будет непрерывно дифференцируемой и по t и, более того:

$$\partial g(t; a) / \partial a = g(a; a) [\Gamma_a(t, a) - \Gamma_a(t, 0)] \quad (0 \leq t \leq a). \quad (9)$$

3. Если $2r \in I_L$, то уравнение

$$q(t; r) + \int_{-r}^r H(|t-s|) q(s; r) ds = 1 \quad (10)$$

будет иметь единственное решение:

$$q(s; r) = q(-s; r) = g(s+r; 2r) \quad (0 \leq s \leq r). \quad (11)$$

Из соотношений (5) и (9) найдем, что

$$\partial q(s; r) / \partial s = q(r; r) [\Gamma_{2r}(r-s, 0) - \Gamma_{2r}(r+s, 0)]; \quad (12)$$

$$\partial q(s; r) / \partial r = -q(r; r) [\Gamma_{2r}(r-s, 0) + \Gamma_{2r}(r+s, 0)]. \quad (13)$$

Теорема 1. Пусть $H(t)$ ($0 \leq t < 2R$ — непрерывная функция такая, что для любого r ($0 \leq r < R$) уравнение (10) имеет единственное непрерывное решение $q(t; r)$ ($0 \leq t \leq r$; $0 \leq r < R$). Тогда эта функция «порождает» дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(p \frac{dy}{dr} \right) + x^2 p y = 0 \quad (0 \leq r < R), \quad (14)$$

где $p(r) = q^2(r; r)$, с решениями

$$\varphi(r; x^2) = \frac{d}{dr} \int_0^r q(s; r) \cos xs ds / p(r); \quad (15)$$

$$\psi(r; x^2) = \frac{d}{dr} \int_0^r q(s; r) \omega(s, x) ds / p(r), \quad (16)$$

где

$$x\omega(t, x) = \sin xt + \int_0^t H(t-s) \sin xs ds \quad (0 \leq t < R), \quad (17)$$

причем

$$\varphi(0; x^2) = 1, \quad \varphi'(0; x^2) = 0, \quad \psi(0; x^2) = 0, \quad \psi'(0; x^2) = 1. \quad (18)$$

Положим $\Phi(r; x^2) = q(r; r) \varphi(r; x^2)$; тогда в силу (13) будем иметь

$$\Phi(r; x^2) = \cos xr + \int_0^r K(r, s) \cos xs ds, \quad (19)$$

где

$$K(r, s) = -\Gamma_{2r}(r+s, 0) - \Gamma_{2r}(r-s, 0), \quad (20)$$

а следовательно:

$$\Phi(r; x^2) = \cos xr - \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(s, 0) \cos x(r-s) ds. \quad (21)$$

Вспоминая (4), убеждаемся в том, что функция $\Phi(r; x^2)$, а с ней и функция $\varphi(r; x^2)$ непрерывно дифференцируемы, а именно:

$$\begin{aligned} \Phi'(r; x^2) &= -2\Gamma_{2r}(2r, 0) \Phi(r; x^2) - x \left[\sin xr - \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(s, 0) \sin x(r-s) ds \right] = \\ &= -2\Gamma_{2r}(2r, 0) \Phi(r; x^2) - x \sin xr + x \int_0^{2r} [\Gamma_{2r}(r-s, 0) - \Gamma_{2r}(r+s, 0)] \sin xs ds. \end{aligned}$$

Используя (12), последний интеграл можно будет проинтегрировать по частям, после чего без труда найдем, что

$$p(r) \frac{d\varphi(r; x^2)}{dr} = -x^2 \int_0^r q(s; r) \cos xs \, ds = -x^2 \int_0^r p(s) \varphi(s; x^2) \, ds.$$

Отсюда уже вытекает, что φ удовлетворяет уравнению (14) и условиям (18). Установление аналогичного для ψ не требует существенно новых средств.

4. Если при данном r уравнение (10) имеет некоторое решение $q(s; r)$ ($-r \leq s \leq r$), то оно будет иметь и четное решение $[q(s; r) + q(-s; r)]/2$. С другой стороны, всякое четное решение $q(s; r)$ уравнения (10) удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$q(t; r) + \int_0^r F(t, s) q(s; r) \, ds = 1 \quad (0 \leq t \leq r), \quad (22)$$

где $F(t, s) = H(|t-s|) + H(t+s)$ ($0 \leq t, s \leq R$).

Обратно, всякое решение $q(t; r)$ ($0 \leq t \leq r$) уравнения (22) после экстраполяции $q(-t; r) = q(t; r)$ ($0 \leq t \leq r$) становится решением уравнения (10). Обозначим через I_H и I_F , соответственно, множества точек r ($0 \leq r \leq R$), для которых, соответственно, уравнения (10) и (22) имеют единственное решение. Согласно сказанному выше $I_H \subset I_F$. Для $r \in I_F$ единственным образом определяется функция $K(r, t)$ ($0 \leq t \leq r$), удовлетворяющая уравнению

$$K(r, t) + \int_0^r K(r, s) F(s, t) \, ds + F(r, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq r); \quad (23)$$

при этом (в согласии с (13), (20) и (2)) для $r \in I_H$:

$$\partial q(r; t) / \partial r = q(r; r) K(r, t) \quad (0 \leq t \leq r), \quad q(r; r) = 1 + \int_0^r K(r, t) \, dt. \quad (24)$$

Лемма. Если $r \in I_F$, то однородное уравнение

$$\chi(t) + \int_{-r}^r H(|t-s|) \chi(s) \, ds = 0 \quad (25)$$

имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, когда $q(r; r) = 0$. Если $q(r; r) \neq 0$, то общее решение уравнения (27) определяется по формуле

$$-\chi(-t) = \chi(t) = \text{const} \cdot \int_0^t K(r, s) \, ds \quad (0 \leq t \leq r). \quad (26)$$

5. Нас будет интересовать тот случай, когда $I_F = [0, R)$, а следовательно, функция $q(t; r)$ определена во всем треугольнике Δ ($0 \leq t \leq r$; $0 \leq r \leq R$). Наши методы позволяют доказать, что если функция $H(t)$ ($0 \leq t < 2R$) k (≥ 0) раз непрерывно (абсолютно непрерывно) дифференцируема, то в этом и только в этом случае функция $q(t; r)$ ($0 \leq r \leq R$) будет $k+1$ раз непрерывно (абсолютно непрерывно) дифференцируемой. Одновременно в этом и только в этом случае ядро $K(r, t)$ будет иметь непрерывные (абсолютно непрерывные) производные по r и t , простые и смешанные, до порядка k включительно.

Теорема 2. Пусть $H(t)$ ($0 \leq t < 2R$) — абсолютно непрерывная функция такая, что для любого r ($0 \leq r \leq R$) уравнение (22) имеет

единственное решение. Тогда функции $H(t)$ можно сопоставить дифференциальную систему:

$$z'' - V(r)z + \lambda z = 0; \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = h \quad (0 \leq r < R), \quad (27)$$

где

$$V(r) = 2dK(r, r)/dr, \quad h = -2H(0), \quad (28)$$

причем ядро $K(r, t)$ ($0 \leq t \leq r < R$) определяется из соотношения (24).

Решением дифференциальной системы (27) будет функция $\Phi(r; \lambda)$ ($0 \leq r < R$), определяемая по формуле (19), где $z = \sqrt{\lambda}$.

Обратно, каково бы ни было комплексное число h и комплексная функция $V(r)$ ($0 \leq r < R$), интегрируемая в любом интервале $(0, a)$ ($0 < a < R$), всегда найдется одна и только одна абсолютно непрерывная функция $H(t)$ ($0 \leq t < 2R$), порождающая указанным образом дифференциальную систему (27). Эта функция может быть получена по формуле

$$2H(t) = dG_h(t/2, t/2)/dt \quad (0 \leq t < 2R), \quad (29)$$

где $G_h(\xi, \eta)$ — решение дифференциальной системы

$$\frac{\partial^2 G_h}{\partial \xi \partial \eta} + V(|\xi - \eta|)G_h = 0, \quad G_h(0, \xi) = 1, \quad \left(\frac{\partial G_h}{\partial \xi} - \frac{\partial G_h}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} = 2h$$

в треугольнике Δ ($0 \leq \eta \leq \xi < R$).

Заметим, что $q(r; r) = \Phi(r, 0)$, и поэтому при $I_F = [0, R)$ множество N нулей функции $q(r; r)$ состоит из конечной или бесконечной последовательности точек $(0 <) r_1 < r_2 < \dots < R)$. Для всех $r \in N$ из $[0, R)$ дифференциальное уравнение из (27) получается из уравнения (14) простой подстановкой: $z = \sqrt{p}y$ ($= q(r; r)y$). После этого нетрудно сообразить, что функция

$$\psi(r; \lambda) = \omega(r; \lambda) + \int_0^r K(r, s)\omega(s, \lambda)ds \quad (0 \leq r < R)$$

является вторым решением дифференциального уравнения (27), причем $\psi(0; \lambda) = 0$, $\psi'(0; \lambda) = 1$ (ω определено в (17)).

Заметим еще, что результаты настоящего исследования без труда обобщаются на случай интегральных уравнений (10) и дифференциальных уравнений (14) или (27), в которых $H(t)$, $q(t; r)$, $p(r)$, $y(r)$, $V(r)$ и $z(r)$ суть квадратные матрицы-функции одного и того же порядка.

За недостатком места здесь опущено сравнение полученного с исследованием И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана⁽²⁾, представляющим важный этап на пути установления приведенных здесь более общих и в некотором смысле более точных результатов.

Одесский институт
инженеров морского флота

Поступило
13 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Г. Крейн, ДАН, 88, № 3 (1953). ² И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (309) 1951. ³ М. Г. Крейн, ДАН, 94, № 6 (1954).