

М. К. ГАВУРИН

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РАЗЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 IV 1954)

Рассматривается линейный интегральный оператор в пространстве $L_2[a, b]$ *

$$A\varphi = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)dt,$$

где ядро $K(s, t)$ суммируемо с квадратом в $[a, b; a, b]$. Как известно, многие методы приближенного разыскания собственных чисел оператора A сводятся к тому, что оператор A заменяется на вырожденный A_0 , к нему близкий. Для оператора A_0 с вырожденным ядром

$$K_0(s, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(s) \overline{\beta_i(t)}$$

нахождение собственных чисел является сравнительно простой алгебраической задачей. Наша цель указать оценку для разности $\mu = \lambda - \lambda_0$, где λ_0 — собственное число оператора A_0 ; λ — ближайшее к нему собственное число оператора A . При этом предполагается, что λ_0 отлично от нуля и является простым собственным числом оператора A_0 .

Основу для оценки представляет наша теорема, опубликованная в заметке ⁽¹⁾. В этой теореме при условии

$$\|B\| \|R\| < \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{2}$$

устанавливается неравенство

$$|\mu| \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} \|B\|.$$

Здесь $B = A - A_0$, так что

$$\|B\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t) - K_0(s, t)|^2 ds dt.$$

Остальные обозначения имеют следующий смысл. Пусть φ_0 и ψ_0 суть неортогональные нормированные собственные элементы операторов A_0 и A_0^* при собственных числах λ_0 и $\overline{\lambda_0}$, соответственно. Тогда $\gamma_0 = |(\varphi_0, \psi_0)|$. Далее, оператор $A_0 - \lambda_0$ взаимно-однозначно отображает ортогональное дополнение H_{φ_0} элемента φ_0 на ортогональное дополнение H_{ψ_0} элемента ψ_0 . Через R обозначается оператор, обратный $A_0 - \lambda_0$ на H_{ψ_0} (определение R дополняется при помощи равенства $R\psi_0 = 0$).

* Одномерным случаем мы ограничиваемся лишь для простоты записи.

Таким образом, дело сводится к нахождению (или оценке) величин γ_0 , $\|B\|$, $\|R\|$. Для $\|B\|$ оценка уже указана. Приводим вычисленные нами значения γ_0 и $\|R\|$.

Пусть A обозначает матрицу $\{(\alpha_j, \alpha_i)\}_{i,j=1}^n$, B — матрицу $\{(\beta_j, \beta_i)\}_{i,j=1}^n$ и Γ — матрицу $\{(\alpha_j, \beta_i)\}_{i,j=1}^n$. Ранг матрицы Γ — λ_0 равен $n-1$, так что одна из ее строк, например с номером i_0 , линейно зависит от остальных. Пусть a есть собственный вектор Γ при собственном числе λ_0 , нормированный условием $(\Delta a, a) = 1$. Обозначим через $\overline{\Gamma - \lambda_0}$ матрицу $\Gamma - \lambda_0$, в которой i_0 -я строка заменена строкой $\bar{a}^*$. Через L обозначим матрицу $\overline{\Gamma - \lambda_0}^{-1}$, в которой i_0 -й столбец заменен нулевым.

Введем еще собственный вектор $b = \{b_i\}_{i=1}^n$ матрицы Γ^* при собственном числе $\bar{\lambda}_0$, нормированный условием $(Bb, b) = 1$, вектор $v = \{v_i\}_{i=1}^n = Lb$ и матрицу $L_1 = \left\{v_i \bar{b}_j \frac{1}{\|b\|^2}\right\}_{i,j=1}^n$. Через M обозначим матрицу $L - L_1$. Через Q обозначим матрицу $\{a_i \bar{a}_j\}_{i,j=1}^n$.

Пусть, далее, Π_α означает n -мерное подпространство с базой $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (эти функции мы считаем линейно независимыми), P_α — оператор проектирования в Π_α , и пусть

$$\varepsilon_i = \beta_i - P_\alpha \beta_i.$$

Через E обозначаем матрицу $\{(\varepsilon_j, \varepsilon_i)\}_{i,j=1}^n$. Легко подсчитывается, что

$$E = \Gamma A^{-1} \Gamma^*.$$

Матрица E может оказаться особенной. Пусть ее ранг есть m ($0 \leq m \leq n$). Предположим для простоты, что матрица m -го порядка $E^{(m)}$ с не равным нулю определителем занимает в E левый верхний угол. Тогда все строки E линейно зависят от первых m строк. Пусть

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \sum_{k=1}^m \rho_{ik} (\varepsilon_j, \varepsilon_k), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathcal{Q} = \{\rho_{ik}\}_{i=1, k=1}^{n, m}.$$

Обозначим

$$D = \lambda_0 \sqrt{A} (1 - QA) M \sqrt{A}^{-1}, \quad F = \sqrt{A} (1 - QA) M \mathcal{Q} \sqrt{E^{(m)}}.$$

Пусть, наконец, W есть квадратная матрица порядка $n+m$, имеющая структуру

$$W = \left| \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} n \\ D \end{array} & \begin{array}{c} m \\ F \end{array} & \begin{array}{c} n \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 1 \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \hline 1 \end{array} \end{array} \right|.$$

Тогда

$$\|R\| = \frac{1}{|\lambda_0|} \max \{ \|W\|, 1 \}^{**}.$$

* Если $a = \{a_i\}_{i=1}^n$, то под $\bar{a}$ мы понимаем вектор $\{\bar{a}_i\}_{i=1}^n$.

** Под нормой матрицы N (не обязательно квадратной) подразумеваем ее норму как линейной операции из одного евклидова пространства в другое, т. е. корень из наибольшего собственного числа матрицы N^*N .

Для γ_0 легко получается выражение

$$\gamma_0 = \lambda_0(a, b).$$

Норма W вычисляется довольно сложно, поэтому иногда приходится ее оценивать. Так, можно воспользоваться оценкой

$$\|W\| \leq \sqrt{\|D\|^2 + \|F\|^2 + 1}.$$

В некоторых случаях матрица W упрощается. Так, если $\varepsilon_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) (в частности, если ядро K_0 симметрично), то $W = D$.

Представляется удобным предварительно ортонормировать систему α_i ($i = 1, \dots, n$). Если обозначить ортонормированные функции через $\tilde{\alpha}_i$ и

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \tilde{\alpha}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$T = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^n,$$

то

$$K_0(s, t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i(s) \overline{\tilde{\beta}_i(t)},$$

где

$$\tilde{\beta}_i = \sum_{j=1}^n \bar{t}_{ji} \beta_j.$$

Обозначая матрицы, связанные с системами функций $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\beta}_i$, знаком $\sim$, имеем

$$\tilde{A} = 1, \quad \tilde{B} = T' B \bar{T}, \quad \tilde{\Gamma} = T' \Gamma (T^{-1})'.$$

Матрицы $\tilde{M}$, $\tilde{E}$, $\tilde{E}^{(m)}$, $\tilde{\Phi}$ вычисляются при помощи найденных уже матриц $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\Gamma}$ по правилам, указанным для нахождения тех же матриц без знака $\sim$. Наконец, получаем

$$\tilde{D} = \lambda_0 \tilde{M}, \quad \tilde{F} = \tilde{M} \tilde{\Phi} V \overline{\tilde{E}^{(m)}}.$$

Особо простое выражение для $\tilde{D}$ значительно облегчает оценки в том случае, когда все ε_i (или, что то же, $\tilde{\varepsilon}_i$) суть нули.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
26 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. К. Гавурин, ДАН, 96, № 6 (1954).