

И. Н. ВРУБЛЕВСКАЯ

О ТРАЕКТОРИЯХ И ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 IV 1954)

Пусть R — метрическое пространство, в котором задана динамическая система $f(p, t)$.

1. Систему $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ топологических отображений множества L_0 в пространстве R называем правильной деформацией множества L_0 в множество L_1 , если выполняются следующие четыре условия:

1) F_0 есть тождественное отображение L_0 на себя, F_1 — отображение L_0 на L_1 ;

2) каково бы ни было $p_0 \in L_0$, точка $F_\lambda(p_0)$ непрерывно зависит от параметра $\lambda \in [0, 1]$;

3) система $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ есть система равностепенно непрерывных отображений, т. е., каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что при любых $p, q \in L_0$, удовлетворяющих условию $\rho(p, q) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(F_\lambda(p), F_\lambda(q)) < \varepsilon$$

для всех $\lambda \in [0, 1]$ одновременно;

4) для каждого λ отображение F_λ^{-1} равномерно непрерывно.

Пусть L_0 есть множество одного из четырех типов: 1 — траектория, 2 — полутраектория, 3 — ω -предельное множество некоторой траектории, 4 — α -предельное множество некоторой траектории. Для таких множеств введем следующие два определения.

Будем говорить, что множество L_0 геометрически эквивалентно множеству L_1 , если существует правильная деформация $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ множества L_0 в L_1 такая, что для всех $\lambda \in [0, 1]$ множества $F_\lambda(L_0)$ являются множествами того же типа (из перечисленных выше четырех типов), что и L_0 .

Будем говорить, что траектория l_0 кинематически эквивалентна траектории l_1 , если существует правильная деформация $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ траектории l_0 в l_1 такая, что для некоторой точки $p_0 \in l_0$ и любого $t \in (-\infty, +\infty)$

$$F_\lambda(f(p_0, t)) = f(F_\lambda(p_0), t).$$

Будем говорить, что полутраектория $f(p_0; 0, +\infty)$ (полутраектория $f(p_0; -\infty, 0)$) кинематически эквивалентна полутраектории $f(p_1; 0, +\infty)$ (полутраектории $f(p_1; -\infty, 0)$), если существует правильная деформация $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ полутраектории $f(p_0; 0, +\infty)$ в $f(p_1; 0, +\infty)$ (соответственно $f(p_0; -\infty, 0)$ в $f(p_1; -\infty, 0)$) такая, что для любого $t \geq 0$ ($t \leq 0$)

$$F_\lambda(f(p_0, t)) = f(F_\lambda(p_0), t).$$

Кинематическая эквивалентность есть частный случай геометрической эквивалентности. Пример вложенных друг в друга циклов показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Геометрически эквивалентные траектории одновременно или замкнутые, или незамкнутые, или являются особыми точками.

Теорема 1. *Если незамкнутые полутраектории геометрически эквивалентны, то при любой правильной деформации их начальные точки соответствуют друг другу и они одновременно или положительные или отрицательные.*

Теорема 2. *Если траектория не является положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону незамкнутой траекторией, то любые положительные (отрицательные) полутраектории ее геометрически эквивалентны.*

2. Если множество L_0 геометрически (кинематически) эквивалентно множеству L_1 и $\{F_\lambda\}_{0 \leq \lambda \leq 1}$ — соответствующая правильная деформация L_0 в L_1 , то L_1 геометрически (кинематически) эквивалентно каждому промежуточному множеству $F_\lambda(L_0)$.

Отношение геометрической эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому семейство всех траекторий динамической системы распадается на классы геометрически эквивалентных траекторий.

Теоретико-множественную сумму всех траекторий одного класса называем геометрической ячейкой.

Аналогично можно определить кинематические ячейки.

Траектории, содержащиеся в одной геометрической ячейке, либо все замкнутые, либо все незамкнутые, либо все являются особыми точками. Геометрическая ячейка связна.

Пусть R и S — метрические пространства, в которых заданы динамические системы $f(p, t)$ и $g(q, t)$, соответственно. Пусть Φ — топологическое отображение R на S такое, что образ траектории есть траектория. Свойство траекторий быть геометрически эквивалентными не сохраняется, вообще говоря, для их образов. Это видно из следующего примера.

На плоскости x, y динамическая система задается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y,$$

на плоскости u, v — уравнениями

$$\frac{du}{dt} = -u,$$

$$\frac{dv}{dt} = -v + \sin u^2 - 2u^2 \cos u^2.$$

Отображение Φ задается формулами

$$u = x,$$

$$v = y + \sin x^2.$$

При отображении Φ траектория $l_0: x=0, y>0$ переходит в траекторию $\Phi(l_0): u=0, v>0$, траектория $l_1: x>0, y=0$ — в траекторию $\Phi(l_1): u>0, v=\sin u^2$. Как нетрудно видеть, траектории $\Phi(l_0)$ и $\Phi(l_1)$ не могут быть геометрически эквивалентными, в то время как l_0 и l_1 геометрически эквивалентны.

Справедливо следующее утверждение.

Если Φ равномерно непрерывно в обе стороны, то геометрические ячейки систем $f(p, t)$ и $g(q, t)$ взаимно-однозначно переводятся друг в друга при отображении Φ .

Теорема 3. Если в полном пространстве траектории имеют геометрически эквивалентные положительные (отрицательные) полутраектории, то ω -предельные (α -предельные) множества этих траекторий также геометрически эквивалентны.

Отсюда для полного пространства следует:

А. Пусть траектория l_0 имеет единственную ω -предельную (α -предельную) точку и пусть некоторая полутраектория траектории l_1 геометрически эквивалентна некоторой положительной (отрицательной) полутраектории траектории l_0 . Тогда l_1 имеет единственную ω -предельную (α -предельную) точку.

Б. Пусть траектория l_0 положительно (отрицательно) устойчива по Лагранжу и пусть некоторая полутраектория траектории l_1 геометрически эквивалентна некоторой положительной (отрицательной) полутраектории траектории l_0 . Тогда l_1 положительно (отрицательно) устойчива по Лагранжу.

В. ω -предельные множества всех траекторий одной геометрической ячейки геометрически эквивалентны друг другу и α -предельные множества всех траекторий одной геометрической ячейки геометрически эквивалентны друг другу.

Г. У всех траекторий одной геометрической ячейки одноименные полутраектории одновременно либо уходящие, либо асимптотические, либо устойчивые по Пуассону.

3. Пусть фазовое пространство R есть плоскость. Пусть H — простая дуга. Соединим концы H двумя какими-либо взаимно непересекающимися простыми дугами такими, что дуга H , кроме концов, содержится в ограниченной ими области. Эта область разбивается дугой H на две области G_1 и G_2 без общих точек. Каждая из полученных двух областей характеризует определенную «сторону» дуги H . Скажем, что во внутренней точке p дуги H траектория $f(p; -\infty, +\infty)$ переходит с одной стороны H — со стороны G_1 — на другую — на сторону G_2 , если можно указать такие $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$, что множество $f(p; -t_1, 0) - \{p\}$ содержится в G_1 , а множество $f(p; 0, t_2) - \{p\}$ содержится в G_2 . Ясно, что справедливость утверждения «траектория переходит в точке с одной стороны H на другую сторону» зависит лишь от поведения траектории вблизи этой точки и не зависит от выбора дуг, определяющих области G_1 и G_2 .

Будем говорить, что траектория l приближается спиралевидно к своей ω -предельной (α -предельной) точке O , если существует простая дуга H с концом в точке O такая, что пересечение траектории l с дугой H представляет собой счетное множество, допускающее задание посредством последовательности $\{p_n\}_0^\infty$, удовлетворяющей следующим четырем условиям: 1) при любом n ($n = 1, 2, \dots$) точка p_n расположена на H между точками p_{n-1} и p_{n+1} ; 2) $p_n \rightarrow O$ при $n \rightarrow \infty$; 3) если t_n ($n = 1, 2, \dots$) — значение параметра, определяемое равенством $p_n = f(p_0, t_n)$, то $t_n > 0$ (соответственно, $t_n < 0$) и $t_n \rightarrow +\infty$ (соответственно, $t_n \rightarrow -\infty$ убывая); 4) во всех точках p_n ($n = 1, 2, \dots$) траектория l переходит с одной и той же стороны H на другую сторону.

Известно ⁽¹⁾, что если траектория имеет не принадлежащую ей обыкновенную ω -предельную или α -предельную точку, то траектория приближается к этой точке спиралевидно.

Теорема 4. Пусть на плоскости у двух различных траекторий некоторые отрицательные (положительные) полутраектории геометрически эквивалентны. Тогда никакая из этих траекторий не может входить в ω -предельное (α -предельное) множество другой траектории.

Теорема 5. Если в плоской динамической системе ω -предельное множество Ω (α -предельное множество A) траектории l содер-

жит точку, к которой траектория l приближается спиралевидно, и состоит более чем из одной точки, то, какова бы ни была траектория, геометрически эквивалентная траектории l , ее ω -предельное (α -предельное) множество совпадает с Ω (с A).

Отсюда следует

Теорема 6. Если в плоской динамической системе ω -предельное множество Ω (α -предельное множество A) траектории l содержит не принадлежащую l обыкновенную точку, то, какова бы ни была траектория, геометрически эквивалентная траектории l , ее ω -предельное (α -предельное) множество совпадает с Ω (с A).

4. Замечание 1. Требование в теореме 5 спиралевидности приближения траектории к предельной точке существенно. Если ω -предельное (α -предельное) множество траектории не пусто и не содержит точки, к которой эта траектория приближается спиралевидно, то ω -предельное (α -предельное) множество геометрически эквивалентной ей траектории не обязано совпадать с ее ω -предельным (α -предельным) множеством. Примером может служить следующая динамическая система.

Прямая $x = 0$ состоит из особых точек; $y = \sin \frac{1}{x} + c$ — семейство обыкновенных траекторий. Такая динамическая система может быть задана дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x^5, \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 \cos \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Траектории $y = \sin \frac{1}{x} + c$, очевидно, геометрически эквивалентны между собой, однако их ω -предельные множества — отрезки $c - 1 \leq y \leq c + 1$ оси y -ов — различны.

Замечание 2. Требование, чтобы предельное множество содержало более одной точки, также существенно. Если ω -предельное (α -предельное) множество траектории состоит из одной точки и эта траектория приближается к своей ω -предельной (α -предельной) точке спиралевидно, то ω -предельное (α -предельное) множество геометрически эквивалентной ей траектории не обязано совпадать с ее ω -предельным (α -предельным) множеством.

Примером служит динамическая система, определяемая дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0, \\ \frac{dy}{dt} &= Ax + By.\end{aligned}$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Немыцкий, Усп. матем. наук, 4, 6 (34) (1949).