

М. Ш. БИРМАН

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 20 IV 1954)

Пусть Ω — внешность ограниченной области с кусочно-гладкой границей Γ в m -мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ эллиптический дифференциальный оператор

$$Lg = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) + cg \quad (1)$$

с достаточно гладкими коэффициентами, заданный на функциях, удовлетворяющих на Γ условиям

$$g|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \nu} + \sigma g|_{\Gamma_2} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ и σ — непрерывная на Γ_2 функция; Γ_1 либо Γ_2 либо всё Γ может отсутствовать.

Предположим, что $\inf_{x \in \Omega} c(x) > -\infty$ и выполнено условие

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x) \xi_i \bar{\xi}_k \leq M(r) \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \quad (r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}), \quad (3)$$

причем $\int_R^\infty M(r)^{-1/2} dr = \infty$. Оператор L , рассматриваемый вначале на

гладких финитных функциях, расширим по К. Фридрихсу⁽¹⁾ до самосопряженного оператора $\tilde{S}$. Спектр $\tilde{S}$ не является, вообще говоря, дискретным. Относительно точек сгущения⁽²⁾ спектра $\tilde{S}$ имеет место

Теорема 1. Множество точек сгущения спектра оператора $\tilde{S}$ не зависит от вида поверхности Γ и граничных условий⁽²⁾.

Доказательство* основано на следующей лемме:

Лемма. Множество решений уравнения $\mathcal{L}u = 0$, ограниченное в метрике

$$[u, u] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \gamma u \bar{u} \right) d\Omega \quad (\gamma = \text{const} > 0),$$

компактно в $L_2(\Omega)$.

Действительно, из теоремы вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева⁽⁴⁾ следует, что рассматриваемое множество функций компактно в $L_2(\Gamma)$. Поэтому достаточно показать, что $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L_2(\Gamma)}$.

* Для оператора $-\Delta g + cg$ при $m = 3$ аналогичную теорему доказывает А. Я. Повзнер⁽³⁾, который пользуется другим методом.

Пусть v — решение уравнения

$$\mathcal{L}_1 v \equiv - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) + \gamma v = u$$

при условии $v|_{\Gamma} = 0$. Интегрируя по частям*, получим соотношение

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{L}_1 v \cdot \bar{u} d\Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \bar{u} d\Gamma. \quad (4)$$

Пусть K_R — шар достаточно большого радиуса ($K_R \supset \Gamma$) и $\Omega_R = \Omega \cap K_R$. Из теоремы вложения⁽⁴⁾ и соотношения (4) следует, что

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_1 \|u\|_{L_2(\Gamma)} \cdot \|v\|_{W_2^{(2)}(\Omega_R)}^{**}.$$

С другой стороны, пользуясь оценкой О. А. Ладыженской⁽⁵⁾, легко получить, что $\|v\|_{W_2^{(2)}(\Omega_R)} \leq C_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}$ и, следовательно, $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq$

$\leq C_1 C_2 \|u\|_{L_2(\Gamma)}$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Рассмотрим сначала вопрос о независимости точек сгущения спектра от вида граничных условий. Пусть S — оператор в $L_2(\Omega)$, порожденный дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ на гладких финитных функциях, обращающихся в нуль в некоторой полосе вблизи Γ , а S^* — оператор, сопряженный с S . Можно показать, что жестким⁽⁶⁾ расширением S_μ оператора S является оператор задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}g = h$ в Ω (ср. ⁽⁷⁾). Пусть $\tilde{S}$ — оператор какой-либо другой граничной задачи вида (2) в Ω . Очевидно, $\tilde{S} \supset S$. Так как операторы S_μ и $\tilde{S}$ полуограниченные, то прибавлением к $c(x)$ достаточно большой постоянной их можно сделать положительно-определенными. Для доказательства теоремы достаточно установить, что оператор $B = \tilde{S}^{-1} - S_\mu^{-1}$ вполне непрерывный⁽²⁾. Оператор B отличен от нуля лишь на некоторой части V подпространства U решений уравнения $S^*u = 0$ ^(8,9). Множество U совпадает в данном случае с множеством принадлежащих $L_2(\Omega)$ решений уравнения $\mathcal{L}u = 0$. В⁽⁹⁾ было отмечено, что B имеет на V положительно-определенный обратный оператор B^{-1} , причем $D(B^{-1/2}) \subset D(\tilde{S}^{1/2})$ и

$$(B^{-1/2}v, B^{-1/2}v) = (\tilde{S}^{1/2}v, \tilde{S}^{1/2}v) \quad (5)$$

для всех $v \in D(B^{-1/2})$. С другой стороны, легко видеть, что квадратичная форма оператора $\tilde{S}$ определяется формулой

$$\tilde{S}[g, g] \equiv (\tilde{S}^{1/2}g, \tilde{S}^{1/2}g) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} + c g \bar{g} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma |g|^2 d\Gamma$$

на функциях, обращающихся в нуль на Γ_1 . Без ограничения общности можно считать, что $c(x) \geq \gamma > 0$ и, следовательно, $\tilde{S}[v, v] \geq [v, v]$. Теперь из (5) и леммы следует, что множество функций $v \in V$, для которых $\|B^{-1/2}v\| \leq 1$, компактно в $L_2(\Omega)$. Последнее означает, что оператор B вполне непрерывен.

Аналогичным образом, но с привлечением метода «расщепления оператора» И. М. Глазмана⁽¹⁰⁾ можно установить независимость множества точек сгущения спектра от вида поверхности Γ . Очевидно, достаточно сравнить с этой целью задачу Дирихле для Ω с задачей Дирихле для $\Omega_1 = \Omega - \Omega_R$. Рассмотрим оператор S в Ω только на финитных функциях, обращающихся в нуль в полосе вблизи Γ и около

* Возможность интегрирования по частям в бесконечной области обеспечивается условием (3), которое в дальнейшем больше не используется.

** Определение класса $W_2^{(2)}$ см. в ⁽⁴⁾.

поверхности Γ_R шара K_R (Γ_R — «поверхность расщепления»). Соответствующее множество U состоит теперь из функций, удовлетворяющих уравнению $\mathcal{L}u = 0$ в Ω_R и в Ω_1 и принадлежащих $L_2(\Omega)$. Жесткое расширение S_μ оператора S представляет собой ортогональную сумму операторов задачи Дирихле в Ω_R и в Ω_1 , причем множество точек сгущения спектра S_μ , очевидно, определяется только задачей Дирихле для Ω_1 . Другим расширением S является оператор $\tilde{S}$ задачи Дирихле для Ω . Его квадратичная форма

$$\tilde{S}[g, g] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i, k=1}^m a_{ik} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_k} + c g \bar{g} \right) d\Omega$$

определена на функциях, обращающихся в нуль на Γ . Остается аналогично предыдущему установить на основании леммы полную непрерывность оператора $B = \tilde{S}^{-1} - S_\mu^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание. Если граница области простирается в бесконечность, то теорема 1 остается верной по отношению к любому конечному куску границы.

Из теоремы 1 легко могут быть получены следующие утверждения:

Теорема 2. *Левее точки $\lambda = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} c(x)$ спектр $\tilde{S}$ дискретен.*

Теорема 3. *Если $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \eta(x) = 0$, то прибавление $\eta(x)$ к $c(x)$ не меняет множества точек сгущения спектра оператора $\tilde{S}$.*

Отметим, что теорема 2 для оператора $-\Delta g + cg$ во всем пространстве была установлена (другим путем) К. Фридрихсом (¹). Теорема, аналогичная теореме 3, была установлена для обыкновенных дифференциальных операторов И. М. Глазманом (¹¹).

Метод доказательства теоремы 1 может быть применен к исследованию других сингулярных граничных задач. Рассмотрим, например, оператор (1) в ограниченной области Ω . Предположим, что квадратичная форма

$\sum_{i, k=1}^m a_{ik}(x) \xi_i \bar{\xi}_k$ вырождается во внутренней точке Ω (в начале

координат) и выполнено условие (3), но при $\int_0^R M(r)^{-1/2} dr = \infty$.

Теорема 1а. *Множество точек сгущения спектра оператора, отвечающего граничной задаче (2), не зависит от вида условий (2) и от формы поверхности Γ области Ω .*

Аналогичная теорема верна и для эллиптических операторов, вырождающихся на части границы конечной области*. Однако в этом случае можно менять только ту часть границы (и граничные условия на ней), которая находится на положительном расстоянии от поверхности вырождения.

Ленинградский горный
институт

Поступило
14 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Friedrichs, Math. Ann., 109, Н. 4—5 (1934). ² В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, 1947. ³ А. Я. Повзнер, Матем. сборн., 32, в. 1 (1953). ⁴ С. Л. Соболев, Некоторые приложения функционального анализа к математической физике, 1950. ⁵ О. А. Ладыженская, ДАН, 79, № 5 (1951). ⁶ М. Г. Крейн, Матем. сборн., 20, в. 3 (1947). ⁷ М. Ш. Бирман, ДАН, 92, № 2 (1953). ⁸ М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., 1 (1952). ⁹ М. Ш. Бирман, ДАН, 91, № 2 (1953). ¹⁰ И. М. Глазман, ДАН, 80, № 2 (1951). ¹¹ И. М. Глазман, ДАН, 87, № 1 (1952). ¹² С. Г. Михлин, ДАН, 91, № 4 (1953). ¹³ С. Г. Михлин, ДАН, 94, № 2 (1954). ¹⁴ М. И. Вишик, ДАН, 93, № 1 (1953). ¹⁵ М. И. Вишик, ДАН, 93, № 2 (1953).

* Такие операторы изучались С. Г. Михлиным (¹², ¹³) и М. И. Вишиком (¹⁴, ¹⁵).