

ФИЗИКА

О. И. СЕМАН

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ АБЕРРАЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ АБЕРРАЦИЙ

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 15 III 1954)

Релятивистские коэффициенты разложения точечного эйконала $\mathcal{E}$ в статических электрических и магнитных полях с симметрией вращения, записанные в нормальной форме ⁽¹⁾, имеют вид

$$Q_{pk} = C^{1-p} (-1)^k \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_a}^{z_i} S_p R_1^{2p-k} R_2^k dz + \left[\sum_{n=0}^{2p} q_{pn} T_{pkn} \right] \right|_{z_a}^{z_i} \right\}, \quad (1)$$

$$p = 0, 1, 2; \quad k = 0, \dots, 2p,$$

где S_p — абберрационные функции, определяемые распределением потенциала V и электрического и магнитного поля вместе с производными $V', \dots, V''', \mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}''$ вдоль оси симметрии (2); q_{pn} — постоянные, зависящие от значений поля и потенциала в граничных точках оси z_a, z_i ; R_1, R_2 — частные решения приведенного к нормальной форме релятивистского параксиального уравнения

$$R'' + \left(\frac{3}{16} \frac{V'^2}{V_r^2} \alpha_1 + \frac{1}{4} \frac{\mathcal{H}^2}{V_r} \right) R = 0; \quad (2)$$

$$T_{pkn} = \frac{1}{(2p-n)!} \left(R'_1 \frac{\partial}{\partial R_1} + R'_2 \frac{\partial}{\partial R_2} \right)^{2p-n} R_1^{2p-k} R_2^k; \quad (3)$$

$$C = R'_1 R_2 - R'_2 R_1 = \text{const}. \quad (4)$$

Штрихи обозначают дифференцирование по координате оси z .

При этом разложение точечного эйконала четвертого порядка записывается в виде

$$-\mathcal{E}_4 = C \sum_{p=0}^2 \frac{1}{p!} \left(\frac{A}{C} \right)^{2-p} \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^k}{k!} Q_{pk} (\vec{\pi}_2 \nabla_{\vec{\pi}_1})^k \vec{\pi}_1^{2p}; \quad (5)$$

$\vec{\pi}_1, \vec{\pi}_2$ — векторы, задающие траекторию $\mathbf{u}$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} V_r^{1/2} = \vec{\pi}_1 R_1(z) + \vec{\pi}_2 R_2(z); \quad (6)$$

$$A = \mathbf{w} \times \mathbf{w}' = \text{const} = V_r^{1/2} (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = C (\vec{\pi}_2 \times \vec{\pi}_1). \quad (7)$$

Для осевого потенциала $V_*(z)$ электрического поля и напряженности $\mathcal{H}(z)$ магнитного поля на оси симметрии приняты обозначения работы ⁽¹⁾:

$$V_* = \frac{E}{-e} + \varphi(z, 0), \quad \mathcal{H} = V_* H, \quad \eta = \frac{-e}{2m_0 c^2} > 0, \quad (8)$$

где $\varphi(z, r)$ — электрический скалярный потенциал, равный нулю за пределами поля; H — напряженность магнитного поля в эрстедах; E — кинетическая энергия частиц, вступающих в поле; $-e$, m_0 — заряд и масса электрона; c — скорость света (все в гауссовой системе единиц).

Релятивистские S -функции и q -постоянные имеют следующие выражения:

$$S_0 = \frac{V''\delta + 4\mathcal{H}^2}{V_r^{3/2}},$$

$$S_1 = \frac{\mathcal{H}''}{V_r} - 3 \frac{\mathcal{H}' V'}{V_r^2} \delta + 3 \frac{\mathcal{H} V'^2}{V_r^3} \alpha_4 + 2 \frac{\mathcal{H}^3}{V_r^2}; \quad (9)$$

$$S_2 = V_r^{-1/2} \left\{ \frac{V'^4}{V_r^4} \alpha_8 - \frac{V'' V'^2}{V_r^3} \alpha_7 + \frac{2}{5} \frac{V''^2}{V_r^2} \alpha_2 - \frac{1}{10} \frac{V'' V'}{V_r^2} \alpha_1 + \frac{V'^2 \mathcal{H}^2}{V_r^3} \alpha_4 - \right.$$

$$\left. - \frac{7}{5} \frac{V' \mathcal{H} \mathcal{H}'}{V_r^2} \delta + \frac{2}{5} \frac{V'' \mathcal{H}^2}{V_r^2} \delta + \frac{8}{15} \frac{\mathcal{H}^4}{V_r^2} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^3}{V_r} - \frac{2}{15} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}''}{V_r} \right\};$$

$$q_{p0} = 0, \quad q_{11} = \frac{1}{8} \frac{\mathcal{H}}{V_r}, \quad q_{12} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \frac{V' \mathcal{H}}{V_r^2} \delta - \frac{\mathcal{H}'}{V_r} \right),$$

$$q_{21} = \frac{1}{8} V_r^{-1/2}, \quad q_{22} = -\frac{1}{45} V_r^{-1/2} V' \delta,$$

$$q_{23} = \frac{1}{32} V_r^{-1/2} \left(\frac{V''}{V_r} \delta + \frac{3}{4} \frac{V'^2}{V_r^2} \alpha_3 + \frac{5}{3} \frac{\mathcal{H}^2}{V_r} \right), \quad (10)$$

$$q_{24} = \frac{1}{32} V_r^{-1/2} \left(-\frac{V'''}{V_r} \delta + \frac{5}{4} \frac{V'^3}{V_r^3} \alpha_6 - \frac{V'' V'}{V_r^2} \alpha_5 + \frac{V' \mathcal{H}^2}{V_r^2} \delta - \frac{10}{3} \frac{\mathcal{H} \mathcal{H}'}{V_r} \right),$$

где

$$V_r = V_*(1 + \sigma), \quad \sigma_r = \sigma(1 + \sigma), \quad \sigma = \eta V_*, \quad \delta = 1 + 2\sigma; \quad (11)$$

$$\alpha_1 = 1 + \frac{4}{3} \sigma_r, \quad \alpha_2 = 1 + \frac{5}{3} \sigma_r, \quad \alpha_3 = 1 + \frac{20}{9} \sigma_r, \quad \alpha_4 = 1 + \frac{8}{3} \sigma_r,$$

$$\alpha_5 = 1 + \frac{10}{3} \sigma_r, \quad \alpha_6 = \delta(1 + \frac{4}{5} \sigma_r), \quad \alpha_7 = \delta(1 + \sigma_r), \quad (12)$$

$$\alpha_8 = \delta^2 + \frac{32}{15} \sigma_r^2.$$

Для определения частных ошибок изображения разлагаем поперечную аберрацию на плоскости гауссового изображения в соответствии с формулой (6) статьи ⁽¹⁾ по векторам *, определяющим положение релятивистской траектории $\mathbf{u}$ в плоскости предмета $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}(z_a)$ и плоскости апертурной диафрагмы $\mathbf{u}_B = \mathbf{u}(z_B)$. При этом вектор траектории в покоящейся системе координат $\mathbf{r}(z)$ связан с вектором $\mathbf{u}(z)$ во вращающейся около оси z системе координат соотношениями:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} \cos \chi - \mathbf{r} \sin \chi,$$

* Полагаем $\vec{\pi}_1 = \mathbf{u}_B$, $\vec{\pi}_2 = \mathbf{u}_a$.

где

$$\underline{r} = \frac{z}{|z|} \times r, \quad \chi = \frac{1}{2} \int_{z_a}^z \frac{\mathcal{H}}{V_r^{1/2}} dz. \quad (13)$$

Релятивистские коэффициенты aberrаций выразим через частные решения R_α , R_γ уравнения (2), удовлетворяющие условиям:

$$R_\alpha(z_a) = R_\gamma(z_B) = 0, \quad R'_\alpha(z_a) = R'_\gamma(z_a) = V_{ra}^{1/2}. \quad (14)$$

Релятивистские формулы коэффициентов* G_{pk} aberrаций изображения, связанные с коэффициентами разложения эйконала Q_{pk} соотношениями

$$G_{pk} = m Q_{pk}(z_a, z_b),$$

где z_a, z_b — координаты плоскости предмета и изображения, m — увеличение, приводятся к виду:

коэффициент Петцваля

$$r_{\alpha B} \frac{G_{00}}{m} = \frac{V_{ra}^{1/2}}{24} \int_{z_a}^{z_b} S_0 dz;$$

коэффициент анизотропной комы G_{10}

$$r_{\alpha B}^2 \frac{G_{10}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_\alpha^2 dz;$$

коэффициент анизотропного астигматизма G_{11}

$$-r_{\alpha B} \frac{G_{11}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_\alpha R_\gamma dz + \frac{1}{8} V_{ra}^{1/2} \left| \frac{\mathcal{H}}{V_r} \right|_{z_a}^{z_b};$$

коэффициент анизотропной дисторсии G_{12}

$$\frac{G_{12}}{m} = \frac{1}{16} \int_{z_a}^{z_b} S_1 R_\gamma^2 dz + \frac{1}{8} \left| \frac{r_\gamma^2}{V_r^{1/2}} \left\{ \mathcal{H} \left(2 \frac{R'_\gamma}{R_\gamma} + \frac{1}{2} \frac{V''}{V_r} - \mathcal{H}' \right) \right\} \right|_{z_a}^{z_b};$$

коэффициент сферической aberrации G_{20}

$$r_{\alpha B}^3 \frac{G_{20}}{m} = \frac{5}{32} V_{ra}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_\alpha^4 dz;$$

коэффициент комы G_{21}

$$-r_{\alpha B}^2 \frac{G_{21}}{m} = \frac{5}{32} V_{ra}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_\alpha^2 R_\gamma dz + \frac{1}{8} \left| \frac{V_{ra}}{V_r} \frac{1}{r_\gamma^2} \right|_{z_a}^{z_b}; \quad (15)$$

коэффициент меридиональной кривизны $3G_{22}$

$$r_{\alpha B} \frac{G_{22}}{m} = \frac{5}{32} V_{ra}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_\alpha^2 R_\gamma^2 dz + \frac{1}{4} \left| \left(\frac{V_{ra}}{V_r} \right)^{1/2} \left(\frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V''}{V_r} \right) \right|_{z_a}^{z_b};$$

* Третьего порядка.

коэффициент дисторсии G_{23}

$$-\frac{G_{23}}{m} = \frac{5}{32} V_{ra}^{-1/2} \int_{z_a}^{z_b} S_2 R_\alpha R_\gamma^3 dz + \frac{3}{8} \left| r_\gamma^2 \left(\left(\frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V'\delta}{V_r} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{36} \left(3 \frac{V''\delta}{V_r} + 2 \frac{V'^2}{V_r^2} (1 + 2\sigma_r) + 5 \frac{\mathcal{H}^2}{V_r} \right) \right) \right|_{z_a}^{z_b}.$$

В коэффициенты (15) аберраций изображения входит только часть выписанных в (12) релятивистских поправочных множителей*, содержащих лишь распределение потенциала на оси симметрии.

Релятивистские коэффициенты (15) отличаются от обычных нормальных коэффициентов аберраций ⁽¹⁾ релятивистскими множителями (12), наличием релятивистского V_r вместо явно входившего V_α и решениями $R_\alpha R_\gamma$ релятивистского параксиального уравнения.

Релятивистские коэффициенты при малых энергиях переходят в обычные ⁽¹⁾, при больших же энергиях определение аберраций по ним не представляет существенных усложнений по сравнению с численным расчетом по нерелятивистским формулам ⁽¹⁾.

Государственный оптический институт
им. С. И. Вавилова

Поступило
22 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. И. Семан, ДАН, 81, № 5, 775 (1951).

* После перегруппировки членов для удобства вычислений вместо множителя α_3 во внеинтегральной части коэффициента дисторсии образовался множитель $1 + 2\sigma_r$. С этой же целью сохранены некоторые значения частных решений неприведенного релятивистского уравнения параксиальных траекторий: $r_\alpha(z_B) = r_{\alpha B}$ и $r_\gamma(z_a) = 1$, $r_\gamma(z_b) = m$, где m — увеличение. Первое из них определяется из $r_\alpha = R_\alpha V_r^{-1/4}$.