

И. М. ЛИФШИЦ и А. В. ПОГОРЕЛОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ И СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ В МЕТАЛЛЕ ПО ОСЦИЛЛЯЦИЯМ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 15 III 1954)

Исследование эффекта де Гааза — ван Альфена для частиц с произвольным законом дисперсии, проведенное в работе (1), показало, что периоды и амплитуды осцилляций магнитного момента связаны с формой граничной поверхности Ферми для электронов в металле. В частности, для не слишком низких температур осциллирующая часть момента определяется формулой

$$M_{\text{осц}} = V \frac{8\pi\theta S_m(\zeta)}{h^3 (cH/eh)^{1/2}} \left| \frac{\partial^2 S(\zeta, p_z)}{\partial p_z^2} \right|^{-1/2} e^{-\lambda} \cos \left[2\pi \frac{cS_m(\zeta)}{|e|hH} + \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right) - 2\pi\gamma \right],$$

$$\lambda = 2\pi^2 \frac{c\theta}{|e|hH} \left(\frac{\partial S_m}{\partial \zeta} \right); \quad \theta = kT; \quad \lambda \gg 1; \quad 0 < \gamma < 1. \quad (1)$$

Здесь $S(\zeta, p_z)$ есть площадь сечения граничной поверхности постоянной энергии $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \zeta$ (ζ — химический потенциал) плоскостью $p_z = \text{const}$ (магнитное поле $\mathbf{H}$ направлено по оси z); $S_m(\zeta)$ обозначает экстремальную площадь сечения поверхности плоскостью данного направления. В случае наличия нескольких групп электронов и, соответственно, нескольких экстремальных сечений выражение (1) заменяется суммой соответствующих осциллирующих слагаемых. Как видно из приведенного выражения (либо из общей формулы (11) работы (1), пригодной для произвольных λ), измерение периода осцилляций $\Delta\left(\frac{1}{H}\right)$ определяет площадь экстремального сечения $S_m(\zeta)$, а измерение их амплитуд и температурной зависимости дает возможность получать значения производных $\partial S_m / \partial \zeta$ и $(\partial^2 S(\zeta, p_z) / \partial p_z^2)_m$.

В настоящей заметке будет показано, что знание этих величин при некоторых довольно общих предположениях позволяет воспроизвести форму граничной поверхности Ферми, а также определить скорости электронов на этой поверхности.

Пусть $\vec{\xi}$ — единичный вектор, а $\sigma(\vec{\xi}) \equiv [S_m(\zeta)]_{\vec{\xi}}$ — экстремальная площадь сечения граничной поверхности $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \zeta$ плоскостью, нормальной к $\vec{\xi}$. Значения $\sigma(\vec{\xi})$ могут быть получены путем измерения зависимости периода осцилляций от направления магнитного поля по формуле

$$\sigma(\vec{\xi}) = eh/c \left[\Delta\left(\frac{1}{H}\right) \right]_{\vec{\xi}}, \quad (2)$$

где поле $\mathbf{H}$ направлено по $\vec{\xi}$.

Мы будем предполагать, что искомая поверхность Ферми имеет центр симметрии и что всякий луч, проведенный из этого центра, встречает поверхность лишь в одной точке*. Тогда экстремальное сечение является центральным и, обозначая длину радиуса-вектора, проведенного из центра к поверхности в направлении $\mathbf{e}$, через $\rho(\mathbf{e})$ ($\mathbf{e}$ — единичный вектор), имеем

$$\sigma(\vec{\xi}) = \pi \overline{\rho^2(\mathbf{e})} \Big|_{(\mathbf{e}\vec{\xi})=0} = \frac{1}{2} \int \rho^2(\mathbf{e}) \delta(\mathbf{e}\vec{\xi}) d\Omega_{\vec{\xi}} \quad (3)$$

($d\Omega$ — элемент площади поверхности единичной сферы).

Таким образом, построение поверхности сводится к задаче определения функции $\pi \rho^2(\mathbf{e})$ ($\rho(\mathbf{e}) = \rho(-\mathbf{e})$) по ее средним значениям на экваторе $\mathbf{e}\vec{\xi} = 0$.

Решение этой задачи может быть получено на основании следующего соотношения, справедливого, как в этом можно убедиться прямым вычислением, для произвольной функции $\psi(\vec{\xi}) = \psi(-\vec{\xi})$, заданной на единичной сфере:

$$\int \bar{\psi}(\vec{\xi}) d\Omega - \int_{z^2 > \lambda^2} \frac{\bar{\psi}(\vec{\xi})z}{V z^2 - \lambda^2} d\Omega = \int_{z^2 > 1 - \lambda^2} \psi(\vec{\xi}) d\Omega; \quad z = (\mathbf{e}\vec{\xi}); \quad \lambda^2 < 1. \quad (4)$$

Здесь $\bar{\psi}(\vec{\xi})$ обозначает среднее значение функции $\psi(\mathbf{e})$ на экваторе $\mathbf{e}\vec{\xi} = 0$; область интегрирования на поверхности единичной сферы определяется неравенствами.

Полагая $\psi(\vec{\xi}) = \pi \rho^2(\vec{\xi})$, $\bar{\psi}(\vec{\xi}) = \sigma(\vec{\xi})$, имеем при достаточно малых λ

$$\pi \rho^2(\mathbf{e}) = \left\{ \int \sigma(\vec{\xi}) d\Omega - \int_{z^2 > \lambda^2} \frac{\sigma(\vec{\xi})z}{V z^2 - \lambda^2} d\Omega \right\} / \pi \lambda^2; \quad z = \vec{\xi} \mathbf{e}. \quad (5)$$

Переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\pi \rho^2(\mathbf{e}) = \chi_e(0) - \int_0^1 [\chi_e(u) - \chi_e(0)] \frac{du}{u^2}; \quad (6)$$

$$\chi_e(u) = \overline{\sigma(\vec{\xi})} \Big|_{\vec{\xi} \mathbf{e} = z} = \frac{1}{2\pi} \int \sigma(\vec{\xi}) \delta(\vec{\xi} \mathbf{e} - u) d\Omega_{\vec{\xi}}.$$

Если в каждом случае выбирать направление $\mathbf{e}$ за полярную ось координатной системы и ввести угол $\cos \theta = \vec{\xi} \mathbf{e}$, а также полярный угол φ в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{e}$, то, обозначая $\sigma(\vec{\xi})$ через $\sigma_e(\cos \theta, \varphi)$, мы можем, проинтегрировав по частям, записать приведенное выражение в виде

$$\pi \rho^2(\mathbf{e}) = \sigma(\mathbf{e}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d\sigma_e(\cos \theta, \varphi)}{d \cos \theta} \frac{d \cos \theta}{\cos \theta}. \quad (6a)$$

Полученная формула (6) решает поставленную задачу; впрочем, для численных расчетов удобнее, повидимому, пользоваться формулой (5), выбрав конечное значение $\lambda \ll 1$.

* В случае нескольких замкнутых поверхностей дальнейшие рассуждения относятся к каждой из них.

Как видно из формулы (6), полученное решение является устойчивым; при этом средняя погрешность в определении формы поверхности связана с погрешностью определения площади $\sigma(\vec{\xi})$ (т. е. периода $\Delta\left(\frac{1}{H}\right)$) по порядку величины соотношением $\delta\rho^2 \sim \delta\sigma$.

Воспроизведя форму поверхности, мы тем самым получим значение $\partial^2 S(\zeta, p_z)/\partial p_z^2$, которое, таким образом, не представляет собой независимого параметра. Таким дополнительным параметром является значение $\partial S_m/\partial\zeta$, которое может быть определено из измерений величины амплитуд осцилляций или их температурной зависимости. Зная значение $\partial S_m/\partial\zeta$ как функцию направлений магнитного поля $\vec{\xi}$, мы можем восстановить величину скоростей электронов на граничной поверхности.

В самом деле, скорость $\mathbf{v}$ определяется равенством $\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{G}(\mathbf{p})$. Если мы рассмотрим наряду с поверхностью $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \zeta$ соседнюю поверхность $\mathcal{G}(\mathbf{p}) = \zeta + \delta\zeta$, то

$$v = |\nabla \mathcal{G}| = \frac{\delta\zeta}{\delta n},$$

где δn обозначает расстояние между этими поверхностями по нормали. С другой стороны, для соседней поверхности площади экстремальных сечений будут

$$S_m(\zeta + \delta\zeta) = S_m(\zeta) + \delta\zeta \frac{\partial S_m}{\partial\zeta},$$

или в прежних обозначениях

$$\delta\sigma(\vec{\xi}) = \delta\zeta \left. \frac{\partial S_m}{\partial\zeta} \right|_{\vec{\xi}}.$$

Согласно (6) это дает возможность вычислить $\delta\rho^2(\mathbf{e})$, а следовательно, и $\delta n = \delta\rho \cdot (\mathbf{e}\mathbf{n})$. Это и решает задачу.

Зная форму поверхности $\rho(\mathbf{e})$, мы можем найти заключенный в ней объем и, следовательно, число электронов в соответствующей зоне. Как уже указывалось, осцилляции восприимчивости в области не слишком больших полей ($H \sim 10^{-4}$ гаусс) связаны лишь с зонами, содержащими аномально малое число электронов. Поэтому измерения в области средних полей позволяют изучить структуру именно этой аномальной зоны. Принципиально измерения в области больших полей дадут возможность изучить ферми-поверхности и других зон. Подобные измерения, однако, весьма сложны, и соответствующие экспериментальные данные в настоящее время отсутствуют.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Поступило
4 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. М. Лифшиц, А. М. Косевич, ДАН, 96, № 5 (1954).