

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. М. БАБИЧ

**О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 IV 1954)

1°. Уравнения движения неоднородной упругой среды выведены в работе (1). Запишем эти уравнения кратко в виде:

$$-L(u) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X. \quad (1)$$

Мы будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1) и свободный член достаточно гладкие.

Пусть надо найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1, \quad u_0 \text{ и } u_1 - \text{известные векторы.}$$

В плоском случае для решения этой задачи используем метод Адамара.

Для однородной среды существуют решения системы уравнений теории упругости, соответствующие случаю $X \equiv 0$ и имеющие вид:

$$h_i = \frac{v_{0i}^{(a)}}{\sqrt{\Gamma_a}} + v_{1i} \sqrt{\Gamma_a} + \delta^{(-1)}\left(t_0 - t - \frac{r}{b}\right) \left(\frac{v_{0i}^{(b)}}{\sqrt{\Gamma_b}} + v_{1i}^{(b)} \sqrt{\Gamma_b} \right) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где $\Gamma_a = (t_0 - t)^2 - \frac{r^2}{a^2}$; $\Gamma_b = (t_0 - t)^2 - \frac{r^2}{b^2}$; $v_{hi} = v_{hi}(M, M_0)$; функция

$\delta^{(-1)}(t)$ равна нулю при $t < 0$ и равна 1 при $t > 0$. Физически решение h_i соответствует единичному импульсу, направленному вдоль оси x_i ($i = 1, 2$) (см. (2), гл. 12).

Для уравнений теории упругости однородной среды решения (2) играют ту же роль, что и элементарное решение $\frac{1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}}$ для волнового уравнения $u_{xx} + u_{yy} = u_{tt}$.

Зная векторы h_i , можно решить задачу Коши для уравнений движения однородной упругой среды примерно тем же методом, как в (3) при помощи функции $\frac{1}{\sqrt{(t_0 - t)^2 - r^2}}$ эта задача решается для волнового уравнения.

2°. Перейдем к случаю неоднородной среды. Пусть $\tau_a(M_0, M)$ и $\tau_b(M_0, M)$ — функции, введенные С. Л. Соболевым в работе (4) для скоростей $a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; $b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Используя метод, вполне аналогичный методу построения элементарного решения для гиперболического уравнения с четным числом пространственных переменных (5), можно построить векторы $\mathbf{h}_i^*$ такие, что:

1) в области $\frac{\tau_b}{t_0 - t} \geq \frac{2}{3}$ они имеют вид (2), где нужно только $\frac{r}{a}$ заменить на τ_a , $\frac{r}{b}$ заменить на τ_b (значения векторов $\mathbf{v}_{ij}^{(a)}$ и $\mathbf{v}_{ij}^{(b)}$ также изменяются);

2) в областях $\tau_a < t_0 - t < \tau_b$ и $\tau_b < t_0 - t$ эти векторы достаточно гладки;

3) при $\tau_a \leq t_0 - t$ верна оценка:

$$\left| -L(\mathbf{h}_i^*) + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_i^*}{\partial t^2} \right| \leq \frac{C}{(t_0 - t)^2} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{t_0 - t}\right)^{-1/2} + \delta^{(-1)} \left(1 - \frac{\tau_b}{t_0 - t}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{t_0 - t}\right)^{-1/2} \right],$$

где C — величина, которую можно считать постоянной для любой заранее выбранной конечной области изменения x_1 и x_2 ;

4) если к векторам $\mathbf{h}_i^*$ применить тот процесс, который для векторов $\mathbf{h}_i$ и уравнений движения однородной среды приводит к решению задачи Коши, то получим интегральное уравнение для определения вектора смещения $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}(M_0, t_0) = \int\limits_{\substack{t \geq 0 \\ \tau_a \leq t_0 - t}} \int A(M_0, t_0, M, t) \mathbf{u}(M, t) dM dt + \mathbf{F}(M_0, t_0). \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{F}$ — известный вектор; A — матрица, элементы которой имеют оценку

$$|a_{ik}| \leq \frac{K}{|t_0 - t|^2} \left[\left(1 - \frac{\tau_a}{t_0 - t}\right)^{-1/2} + \delta^{(-1)} \left(1 - \frac{\tau_b}{t_0 - t}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{t_0 - t}\right)^{-1/2} \right]; \quad (4)$$

K тоже обозначает величину, которую можно считать постоянной для любой заранее выбранной конечной области изменения x_1, x_2 .

3°. В трехмерном случае на систему (1) можно распространить метод Соболева — Кирхгофа, существенно модифицировав его.

Пусть в области T с достаточно гладкой границей S заданы функции $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ и $\Gamma(X) = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$, достаточно гладкие вплоть до границы.

Определим интегралы от «обобщенных функций»:

$$I_T = \int_T f(X) \delta^{(l)}(\Gamma(X)) dX; \quad I_S = \int_S f(X) \delta^{(l)}(\Gamma(X)) dS \quad (5)$$

следующим образом:

1) если в области T (соответственно на поверхности S) $|\Gamma| > \alpha > 0$, то $I_T = 0$ (соответственно, $I_S = 0$);

2) если при всех $|\Gamma_0| < \varepsilon$ множество точек $\Gamma(X) = \Gamma_0 = \text{const}$ представляет собой $(n-1)$ -мерную поверхность Σ_{Γ_0} , причем интеграл по поверхности $\Gamma = \Gamma_0$

$$\lambda(\Gamma_0) = \int_{\Gamma=\Gamma_0} f(X) \frac{d\Sigma_{\Gamma_0}}{|\text{grad } \Gamma|}$$

имеет смысл и существует $\frac{d^l \lambda(\Gamma_0)}{d\Gamma_0^l}$ при $\Gamma_0 = 0$, то полагаем

$$I_T = (-1)^l \lambda^{(l)}(0).$$

3) Пусть ν обозначает внешнюю нормаль к границе S области T . Если при всех $|\Gamma_0| < \varepsilon$ пересечение поверхности $\Gamma = \Gamma_0$ и поверхности S представляет собой $(n-2)$ -мерную поверхность σ_{Γ_0} , причем интеграл по $(n-2)$ -мерной поверхности σ_{Γ_0}

$$\mu(\Gamma_0) = \int_{\sigma_{\Gamma_0}} f(X) \frac{d\sigma_{\Gamma_0}}{V |\text{grad } \Gamma|^2 - (\nu \cdot \text{grad } \Gamma)^2}$$

имеет смысл, и существует $\mu^{(l)}(0)$, то полагаем по определению

$$I_S = (-1)^l \mu^{(l)}(0).$$

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — достаточно гладкая функция от $x_1, \dots, x_n$ в объеме T .

Будем называть обобщенной функцией выражение (число слагаемых конечно)

$$\psi = b_0(x_1, \dots, x_n) + \sum a_{ik}(x_1, \dots, x_n) \delta^{(i)}(\Gamma_k(x_1, \dots, x_n)), \quad (6)$$

где $a_{ik}(x_1, \dots, x_n)$ и $\Gamma_k(x_1, \dots, x_n)$ — достаточно гладкие функции, а $b_0(x_1, \dots, x_n)$ может иметь разрывы 1-го рода на поверхностях $\Gamma_k(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Если b_0 и a_{ik} суть векторные функции, то будем называть ψ обобщенным вектором. Обычные функции можно рассматривать как частный случай обобщенных, когда $a_{ik} \equiv 0$.

Назовем интегралом от произведения $\varphi(X)$ на обобщенную функцию $\psi(X)$ выражение:

$$(\varphi, \psi) = \int_{T \text{ или } S} \varphi \psi d\omega = \int_{T \text{ или } S} b_0 \varphi d\omega + \sum_{i,j} \int_{T \text{ или } S} a_{ij} \varphi(X) \delta^{(j)}(\Gamma_i) d\omega.$$

Предполагается, что каждый интеграл под знаком суммы существует в смысле данного выше определения.

Если $(\varphi, \psi_1) = (\varphi, \psi_2)$ при всех достаточно гладких φ , то будем говорить, что $\psi_1 = \psi_2$ в объеме T (или на поверхности S).

Пусть для достаточно гладких φ , равных нулю в окрестности границы объема T , выполняется тождество

$$(-1)^\alpha \int_T \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \psi \right) dX = \int \varphi \psi^* dX,$$

где ψ^* — обобщенная функция.

Полагаем тогда по определению

$$\psi^* = \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Можно доказать, что в достаточно широких условиях любую производную обобщенной функции (6) можно получить, если формулу (6) последовательно дифференцировать обычным образом, полагая $\frac{d}{d\Gamma_i} \delta^{(j)}(\Gamma_i) = \delta^{(j+1)}(\Gamma_i)$.

Для обобщенных функций в предположениях достаточно широких верна формула Остроградского

$$\int_T \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} dX = \int_S \psi \cos \widehat{v} x_\alpha dS.$$

4°. Обратимся теперь к уравнениям теории упругости неоднородной среды.

Можно построить такую систему трех обобщенных векторов $\mathbf{h}_1^*$, $\mathbf{h}_2^*$, $\mathbf{h}_3^*$, что:

1) в области $\tau_b \geq 2/3(t_0 - t)$ они имеют вид:

$$\mathbf{h}_j^* = \mathbf{v}_0^{(a)} \delta(\gamma_n) + \delta^{(-1)}(\gamma_n) (\mathbf{v}_1^{(a)} + \mathbf{v}_2^{(a)} \gamma_a) + \mathbf{v}_0^{(b)} \delta(\gamma_b) + \delta^{(-1)}(\gamma_b) (\mathbf{v}_1^{(b)} + \mathbf{v}_2^{(b)} \gamma_b);$$

здесь $\mathbf{v}_{ik} = \mathbf{v}_{ik}(M_0, M)$; $\gamma_a = t_0 - t - \tau_a$; $\gamma_b = t_0 - t - \tau_b$;

2) в областях $\tau_a < t_0 - t < \tau_b$ и $\tau_b < t_0 - t$ $\mathbf{h}_j^*$ суть обычные достаточно гладкие векторы;

3) вектор $-L(\mathbf{h}_j^*) + \partial^2 \mathbf{h}_j / \partial t^2$ обычный, причем верна оценка

$$\left| -L(\mathbf{h}_j^*) + \frac{\partial^2 \mathbf{h}_j^*}{\partial t^2} \right| \leq \frac{c}{(t_0 - t)^3} \ln \frac{1}{t_0 - t}, \quad (c = \text{const});$$

4) применяя к искомому вектору $\mathbf{u}$ (предполагая его достаточно гладким) и к вектору $\mathbf{h}_j^*$ формулу Грина—Вольтерры (за область интегрирования T берем слой $0 \leq t \leq t_0 - \delta$) и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, можно получить интегральное уравнение типа (3), где оценка (4) заменяется оценкой $|a_{ik}| \leq \frac{K}{(t_0 - t)^3} \ln \frac{1}{t_0 - t}$.

При помощи приема, принадлежащего С. Л. Соболеву ((⁶), стр. 197—206), из полученных результатов нетрудно вывести существование решения задачи Коши для системы (1) и достаточную гладкость этого решения при достаточно гладких коэффициентах уравнения (1) и векторах $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{X}$.

5°. Рассмотрение обобщенных функций показывает, что по сути дела основа метода Соболева и метода Адамара одна и та же — построение фундаментального решения, точное для случая постоянных коэффициентов уравнения и приближенное в случае переменных достаточно гладких коэффициентов.

В случае пространств четномерных эти фундаментальные решения будут обычными функциями, в случае пространств нечетномерных — обобщенными функциями.

Ленинградский государственный
университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Михлин, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 4 (1947). ² Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937. ³ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945. ⁴ С. Л. Соболев, Тр. Сейсмологич. инст., в. 6 (1930). ⁵ J. Hadamard, Le Problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles, Paris, 1932. ⁶ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа к математической физике, 1950.