

Б. С. КОВАЛЬСКИЙ

# О ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ ПОДЪЕМНЫХ КАНАТОВ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 15 III 1954)

Пусть  $l$  — длина ненапряженного каната. Если окружная скорость барабана  $v(t)$ , то при подъеме груза в момент  $t$  длина каната будет равна

$$l(t) = l - \int_0^t \frac{v dt}{1 + T/B},$$

расстояние же от груза до барабана (длина напряженного каната) равно

$$x = \left(1 + \frac{T}{B}\right) \left(l - \int_0^t \frac{v dt}{1 + T/B}\right), \quad (1)$$

где  $T(t)$  — натяжение каната;  $B = EF$ ;  $E$  — модуль упругости;  $F$  — площадь сечения каната (см. рис. 1).

Пренебрегая собственным весом каната, имеем уравнение движения груза

$$m\ddot{x} + T - mg = 0; \quad (2)$$

подставляя  $\ddot{x}$  из (1) в (2), получаем

$$\left(1 - \frac{1}{l} \int \frac{v dt}{1 + T/B}\right) \ddot{T} - \frac{v}{l(1 + T/B)} \dot{T} + \frac{B}{ml} T = \frac{B}{l} (g + \dot{v}), \quad (3)$$

где точками обозначены производные по  $t$ .

Так как для стальных канатов величина  $T/B$  имеет порядок  $10^{-3}$ , то уравнение (3) может быть упрощено\*:

$$\left(1 - \frac{1}{l} \int v dt\right) \ddot{T} - \frac{v}{l} \dot{T} + \frac{B}{ml} T = \frac{B}{l} (g + \dot{v}), \quad (4)$$

причем при  $t = 0$  имеем

$$\dot{T}(0) = \frac{B}{l} [\dot{x}(0) + v(0)],$$

$$\ddot{T}(0) = \frac{B}{l} \left\{ \ddot{x}(0) + \dot{v}(0) + \frac{v(0)}{l} [\dot{x}(0) + v(0)] \right\}.$$

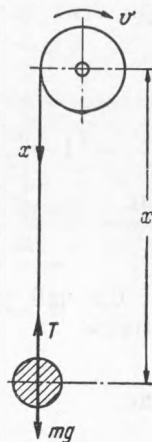


Рис. 1

\* На основании (1) и (2) легко придти к равносильному (3) уравнению

$$m\ddot{x} = (m\ddot{x} - B - mg) (\dot{x} + v),$$

ранее полученному Н. П. Нероновым (1). Мы предпочитаем форму (3), позволяющую перейти к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (4) относительно  $T$ .

Иным путем к уравнению второго порядка (относительно  $x$ ) пришел А. Ш. Локшин (4); недостаточная убедительность этого решения отмечена Нероновым (1).

В частном случае  $v = a + bt$ ,  $b > 0$  подстановка в (4)

$$z = \frac{(a + bt)^2}{a^2 + 2bt}, \quad \gamma^2 = \frac{B}{2mb}$$

дает (штрихами обозначены производные по  $z$ ) уравнение

$$z(1-z)T'' + (1/2 - 3/2z)T' + \gamma^2(T - mg - mb) = 0, \quad (5)$$

решаемое в гипергеометрических функциях:

$$T = m(g + b) + C_1 F(-n, n + 1/2, 1/2, z) + C_2 \sqrt{z} F(-n + 1/2, n + 1, 3/2, z), \quad (6)$$

где  $n = \sqrt{\gamma^2 + 1/16} - 1/4$ , или, так как  $n$  велико и может считаться целым <sup>(2)</sup>,

$$T \approx m(g + b) + \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} (A \cos 2\gamma\varphi + B \sin 2\gamma\varphi), \quad z = \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

Пусть  $T(0) = mg$  и  $\dot{x}(0) = 0$  (при этом  $\dot{T}(0) = Ba/l$ ); определяя при этих начальных условиях  $A$  и  $B$ , получаем:

$$T \approx m(g + b) + \left(1 - \frac{at}{l} - \frac{bt^2}{2l}\right)^{-1/4} \left[ a \sqrt{\frac{Bm}{l}} \sin 2\gamma(\varphi - \varphi_0) - mb \cos 2\gamma(\varphi - \varphi_0) \right], \quad (8)$$

где

$$\sin^2 \varphi_0 = z(0) = \frac{a^2}{a^2 + 2bt}.$$

Случай  $v = a = \text{const}$  непосредственно вытекает из (8); при  $b \rightarrow 0$  имеем

$$\sin 2\gamma(\varphi - \varphi_0) \rightarrow \sin \beta (1 - \sqrt{n}), \quad (9)$$

где

$$u = 1 - \frac{at}{l}, \quad \beta^2 = \frac{4Bl}{ma^2},$$

и для  $T$  получаем

$$T \approx mg + a \sqrt{\frac{Bm}{l}} u^{-1/4} \sin \beta (1 - \sqrt{u}). \quad (10)$$

Из (8) или (10) следует, что амплитуда натяжения каната при подъеме груза возрастает обратно пропорционально  $\sqrt{l(t)}$ . Однако рассеяние энергии вследствие трения между проволоками каната и гистерезиса в металле вносит в полученный вывод значительный корректив.

Если оценить «сопротивление» величиной

$$R = \frac{rl}{B} \dot{T},$$

где  $r$  — коэффициент пропорциональности, то вместо (2) имеем

$$m\ddot{x} + \frac{rl}{B} \dot{T} + T - mg = 0;$$

при  $v = a$  и обозначениях (9) и

$$p = \frac{rl}{ma} \quad (11)$$

получаем для  $T$  уравнение

$$uT'' + (1 - p)T' + \frac{\beta^2}{4}(T - mg) = 0, \quad (12)$$

откуда

$$T = mg + u^{p/2} [C_1 J_p(\beta \sqrt{u}) + C_2 Y_p(\beta \sqrt{u})].$$

Определяя  $C_1$  и  $C_2$  при принятых ранее начальных условиях и переходя к асимптотическим значениям функций Бесселя, имеем

$$T \approx mg + a \sqrt{\frac{Bm}{l}} u^{\frac{p}{2} - \frac{1}{4}} \sin \beta(1 - \sqrt{u}); \quad (13)$$

при  $p < 1/2$  амплитуда колебаний при подъеме груза увеличивается, при  $p = 1/2$  остается постоянной, при  $p > 1/2$  имеем затухающие колебания.

Если принять, что сопротивление пропорционально скорости деформации (удлинения) каната,  $R = r(\dot{x} + v)$ , то, так как дифференцирование (1) по  $t$  дает

$$\dot{x} + v = \frac{l(t)}{B} \dot{T},$$

получаем

$$uT'' + (1 - pu)T' + T - mg = 0, \quad (14)$$

интеграл (14) выражается в вырожденных гипергеометрических функциях и асимптотическое значение его (при прежних начальных условиях)

$$T \approx mg + a \sqrt{\frac{Bm}{l}} e^{-\frac{p}{2}(1-u)} u^{-\frac{1}{4}} \sin \beta(1 - \sqrt{u}). \quad (15)$$

При  $p \leq 1/2$  амплитуда возрастает, начиная с  $u = 1$  ( $t = 0$ ), при  $p > 1/2$  амплитуда вначале уменьшается, достигает минимума при  $u = 1/2p$  и затем возрастает (см. рис. 2).

Порядок величины  $p$  можно приближенно оценить следующим путем. В области  $u \approx 1$

$$\beta(1 - \sqrt{u}) = \beta \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{at}{l}} \right) \approx \frac{\beta a}{2l} t,$$

период колебаний равен

$$\tau = \frac{4\pi l}{\beta a}$$

и логарифмический декремент затухания (при сопротивлении, пропорциональном скорости)

$$\lambda = \frac{r\tau}{2m} = \frac{2\pi r l}{\beta a m},$$

откуда

$$p = \frac{\beta \lambda}{2\pi}.$$

Если рассеяние энергии вызвано «внутренним трением», то  $\lambda \approx \psi/2$ , где  $\psi$  — «относительное внутреннее сопротивление», и мы можем записать, обозначив  $\sigma = mg/F$ :

$$\bar{p} = \frac{\beta \psi}{4\pi} = \frac{\psi}{2\pi} \sqrt{\frac{Bl}{ma^2}} = \frac{\psi}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} \sqrt{\frac{gl}{a^2}} = K\psi.$$

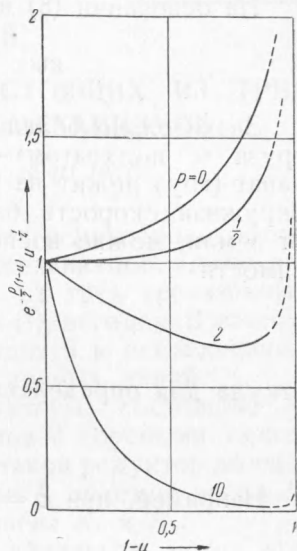


Рис. 2

Обычно имеем  $E/\tau = 300-500$ ,  $l = 3-30$  м,  $a = 0,2-0,5$  м/сек (параметры кранового подъема), следовательно,  $K > 100$ . Для стальной проволоки можно принять  $\psi = 0,01-0,02$  <sup>(3)</sup>, при этом  $p > 1$ ; учитывая же трение между проволоками в канате и демпфирующее влияние трения в блоках полиспаста и изгиба каната на блоках, можно уверенно принять  $p = 10-20$  \*. В этом случае амплитуда колебаний уменьшается на протяжении 95—97% пути подъема груза и практически максимальное натяжение каната имеет место в самом начале колебаний.

На основании (8) имеем

$$\max T = m(g + b) + \sqrt{m^2 b^2 + \frac{a^2 B m}{l}}. \quad (16)$$

Значительно большие натяжения возникают в канате при подъеме груза «с подхватом» — когда на барабан навивается прослабленный канат (груз лежит на земле). Если с момента выбора слабины каната окружная скорость барабана равна  $v(t)$ , то, пока груз не оторвался от земли, можно воспользоваться (1) при  $x = l$ , что приводит к зависимости

$$1 + \frac{T}{B} = e^{\frac{1}{l} \int v dt},$$

откуда для определения  $t_1$  при  $T = mg$  имеем

$$\frac{1}{l} \int v dt = \ln \left( 1 + \frac{mg}{B} \right).$$

Например, при  $v = bt$  имеем

$$\frac{b}{l} \frac{t_1^2}{2} = \ln \left( 1 + \frac{mg}{B} \right) \approx \frac{mg}{B},$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m l g}{B b}}.$$

Отсчитывая время  $t$  от момента отрыва груза, имеем

$$v_1(t) = b(t_1 + t) = \sqrt{\frac{2m l g b}{B}} + bt,$$

и для определения  $\max T$  можно воспользоваться (16) при

$$a = \sqrt{\frac{2m l g b}{B}},$$

что дает

$$\max T = m(g + b + \sqrt{b^2 + 2bg}). \quad (17)$$

Ново-Краматорский  
машиностроительный завод  
им. И. В. Сталина

Поступило  
7 IV 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. П. Неронов, Прикладн. матем. и мех., 3, № 1 (1936). <sup>2</sup> Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, 1934. <sup>3</sup> Динамические свойства строительных материалов, Сборн. под ред. Ю. А. Нилендера, 1940. <sup>4</sup> А. Ш. Локшин, Горн. журн., № 12 (приложение) (1929). <sup>5</sup> И. Л. Корчинский, Расчет строительных конструкций на вибрационную нагрузку, 1948.

\* В расчетах колебаний стальных конструкций принимают  $\psi = 0,16-0,18$  <sup>(5)</sup>.