

Г. Н. ЧЕБОТАРЕВ

О РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 IV 1954)

1°. Известно, что для коммутативных матриц справедлив закон сложения показателей при умножении:

$$e^B \cdot e^C = e^{B+C}. \quad (1)$$

М. Фреше ^(1,2) поставил вопрос об определении общего вида матриц B, C , хотя бы второго порядка, для которых этот закон имеет место. Однако при решении этого вопроса он упустил целый класс таких матриц, так как считал очевидным следствием соотношения (1) коммутативность матриц e^B и e^C , что не так.

Пусть B, C — матрицы второго порядка; ξ_1, ξ_2 — собственные значения матрицы B ; η_1, η_2 — матрицы C и ζ_1, ζ_2 — матрицы $B + C$. Введем обозначение $\xi = \xi_2 - \xi_1, \eta = \eta_2 - \eta_1, \zeta = \zeta_2 - \zeta_1$. Тогда справедлива

Теорема. Соотношение (1) выполняется в следующих и только в следующих случаях:

I. B и C коммутативны.

II. $[B, C] \neq 0$, но e^B, e^C и e^{B+C} скалярны; это будет, если разности собственных значений матриц $B, C, B + C$ суть отличные от нуля кратности $2\pi i$: $\xi = 2\pi i k, \eta = 2\pi i l, \zeta = 2\pi i m$, и $k + l \equiv m \pmod{2}$ (случай, исследованный Фреше).

III. $[B, C] \neq 0, [e^B, e^C] \neq 0, BC = -\xi_1 \eta_1 E + \eta_1 B + \xi_1 C$ и

$$\begin{aligned} \frac{e^\xi - 1}{\xi} &= \frac{e^\eta - 1}{\eta}, & \text{если } \xi \neq 0, \eta \neq 0, \xi \neq \eta; \\ \frac{e^{-\xi} - 1}{-\xi} &= \frac{e^{-\eta} - 1}{-\eta} = 1, & \text{если } \xi = \eta \neq 0; \\ \frac{e^\xi - 1}{\xi} &= 1, \xi \neq 0, & \text{если } \eta = 0; \\ \frac{e^\eta - 1}{\eta} &= 1, \eta \neq 0, & \text{если } \xi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В самом деле, пусть B, C — некоммутирующие матрицы второго порядка; $e^B = \beta_0 E + \beta_1 B, e^C = \gamma_0 E + \gamma_1 C, e^{B+C} = \delta_0 E + \delta_1 (B + C)$, где E — единичная матрица. Соотношение (1) дает:

$$\beta_0 \gamma_0 E + \beta_1 \gamma_0 B + \beta_0 \gamma_1 C + \beta_1 \gamma_1 BC = \delta_0 E + \delta_1 (B + C). \quad (3)$$

Имеет место альтернатива: β_1, γ_1 или оба равны нулю, или оба отличны от нуля. В самом деле, если бы, например, $\gamma_1 = 0, \beta_1 \neq 0$, то $\gamma_0 \neq 0$ в силу неособенности матрицы e^C , и из (2) B линейно выражалась бы через C и E , т. е. была бы коммутативна с C . Далее, $[e^B, e^C] = \beta_1 \gamma_1 [B, C]$, т. е., если e^B и e^C коммутативны, то они скалярны.

Этот случай и был рассмотрен Фреше, давшим параметрическое представление соответствующих матриц B , C .

Итак, пусть $\beta_{11} \neq 0$. Из (3) следует

$$BC = \lambda E + \mu B + \nu C. \quad (4)$$

Лемма. Если для некоммутативных матриц B , C (любого порядка) выполняется соотношение (4), то μ — собственное значение матрицы C , ν — собственное значение матрицы B и $\lambda = -\mu\nu$.

Действительно, умножая, например, (4) слева, а затем справа на B и вычитая, получим: $(B - \nu E)[B, C] = 0$, откуда, в силу $[B, C] \neq 0$, $B - \nu E$ — особенная матрица. Вычислив при помощи (4) произведение $(B - \nu E)(C - \mu E)$ и взяв определители от обеих частей равенства, получим, что $\lambda + \mu\nu = 0$.

Для нашего случая при соответствующей нумерации собственных значений (4) перепишется так:

$$BC = -\xi_1 \eta_1 E + \eta_1 B + \xi_1 C. \quad (5)$$

Подвергнем одновременно B и C преобразованию T , приводящему B к жордановой нормальной форме, что не изменит собственных значений матриц и не нарушит соотношений (1) и (5). Подставляя преобразованные матрицы в (5), установим, что $T^{-1}CT$ — треугольная матрица. Вычисляя экспоненциалы преобразованных матриц по формуле Лагранжа — Сильвестера, убедимся непосредственной выкладкой, что соотношение (1) выполняется для преобразованных, а следовательно,

и для первоначальных матриц тогда и только тогда, если $\frac{e^{-\eta} - 1}{-\eta} = \frac{e^{\xi} - 1}{\xi - \eta_1}$

при $\xi \neq 0$ и $\frac{e^{\eta} - 1}{\eta} = 1$ при $\xi = 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Для рассмотренного случая нетрудно получить параметрическую форму матриц B и C . Пусть

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

В прежних обозначениях $\xi_1 = \frac{\alpha + \delta}{2} - \frac{\xi}{2}$, $\eta_1 = \frac{a + d}{2} - \frac{\eta}{2}$. Соотношение (5) дает после несложных преобразований 4 уравнения:

$$\begin{aligned} [\xi + (\delta - \alpha)][\eta + (d - a)] &= -4\gamma b, \\ [\xi - (\delta - \alpha)][\eta - (d - a)] &= -4\beta c, \\ b[\xi - (\delta - \alpha)] &= -\beta[\eta + (d - a)], \\ c[\xi + (\delta - \alpha)] &= -\gamma[\eta - (d - a)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Считая ξ и η удовлетворяющими одному из условий (2) и выражая из уравнений (6) c , b , γ , β через ξ , η и a , α , d , δ , считаемые произвольными параметрами, найдем, что матрицы B и C должны иметь одну из форм:

$$1. \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\xi^2 - (\delta - \alpha)^2}{4\gamma} \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -\frac{[\xi + (\delta - \alpha)][\eta + (d - a)]}{4\gamma} \\ -\frac{[\eta - (d - a)]}{[\xi + (\delta - \alpha)]}\gamma & d \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\xi \neq \delta - \alpha, \quad \gamma \neq 0.$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha - \xi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & -\frac{\beta[\eta + (d-a)]}{2\xi} \\ -\frac{\xi[\eta - (d-a)]}{2\beta} & d \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$\beta \neq 0, \quad \xi \neq 0.$

$$3. \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha + \xi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a - \eta \end{pmatrix} \quad (9)$$

или

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha - \xi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & \alpha + \eta \end{pmatrix}.$$

Приведенное исследование не удалось распространить на случай матриц высших порядков.

2°. В качестве приложения рассмотрим вопрос о решении в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций (см. (3)):

$$X^+(t_0) = A(t_0) X^-(t_0), \quad (10)$$

где $A(t_0)$ — функциональная матрица, заданная на замкнутом контуре L ; $X^+(t_0)$ (соотв. $X^-(t_0)$) — краевое значение канонической матрицы решений, голоморфной во внутренней области D^+ (соотв. во внешней области D^-). В (3) Ф. Д. Гахов поставил вопрос о классе функциональных матриц $A(t_0)$, для которых каноническая матрица решений может быть определена по формуле

$$X(z) = e^{\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln A(t) dt}{t-z}}, \quad (11)$$

по аналогии со случаем $n = 1$.

Пользуясь формулами Сохоцкого для предельных значений интеграла Коши, краевое условие (10) для матрицы, определяемой формулой (11), можно представить так:

$$e^{1/2 g(t_0) + h(t_0)} = e g(t_0) \cdot e^{-1/2 g(t_0) + h(t_0)}, \quad (12)$$

где $g(t_0) = \ln A(t_0)$, $h(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) dt}{t - t_0}$.

Таким образом, для матриц $B = g(t_0)$ и $C = -1/2 g(t_0) + h(t_0)$ должно выполняться правило сложения показателей при умножении (1).

Ограничимся случаем $n = 2$. Тогда B и C должны быть одного из типов I, II, III, упомянутых в теореме п. 1°.

Пусть $[B, C] = 0$. Запишем это условие так:

$$[B, C] = [g(t_0), h(t_0)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L [g(t_0), g(t)] \frac{dt}{t - t_0} = 0.$$

Это условие заведомо выполняется, если $[g(t_0), g(t)] \equiv 0$ при любых $t_0, t \in L$. $A(t)$ должна обладать таким же свойством. Такие матрицы, называемые функционально-коммукативными, были выделены Ф. Д. Гаховым в (3) и изучены В. В. Морозовым (4).

Более детальное исследование показывает, что для выполнения условия $[B, C] = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $g(t_0)$ имела одну из следующих форм:

$$1. \quad g(t_0) = \varphi_1(t_0) E + \varphi(t_0) \Lambda(t_0),$$

где $\varphi_1(t_0)$, $\varphi(t_0)$ — непрерывные функции, а $\Lambda(t_0)$ — значение на L матрицы, аналитической на всей плоскости, кроме изолированных

точек, в которых ее элементы могут иметь полюсы, причем $\Phi(z) \Lambda(z)$, где $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}$, кусочно-голоморфна во всей плоскости и на бесконечности обращается в нуль. При $\Lambda(z) = \text{const}$ $g(t_0)$ обращается в функционально-коммутативную матрицу.

$$2. g(t_0) = \varphi_1(t_0)E + \Lambda^+(t_0) \text{ или } g(t_0) = \varphi_1(t_0)E + \Lambda^-(t_0),$$

где $\Lambda^+(t_0)$ (соотв. $\Lambda^-(t_0)$) — краевое значение матрицы, голоморфной в D^+ (соотв. в D^- и на бесконечности обращающейся в нуль).

Обратимся теперь к случаю некоммутативных B и C . Прежде всего, случай II, рассмотренный Фреше, не дает ничего нового в смысле применения формулы (11), ибо $A(t_0) = e^{\xi(t_0)} = e^B$ в этом случае скалярна, т. е. функционально-коммутативна. Итак, пусть B и C принадлежат к одному из типов (7), (8), (9). Их элементы удовлетворяют системе сингулярных уравнений, записываемой в матричной форме так:

$$C(t_0) = -\frac{1}{2}B(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(t) dt}{t-t_0}. \quad (13)$$

Будем считать параметры, входящие в B и C , функциями от t_0 , а ξ и η — постоянными числами, так как исследование системы (13) при функциональных ξ и η , удовлетворяющих добавочному функциональному соотношению $\frac{e^{\xi(t_0)} - 1}{\xi(t_0)} = \frac{e^{\eta(t_0)} - 1}{\eta(t_0)}$, оказывается непреодолимо трудным. Решая систему (13), установим, что матрица $A(t_0)$ должна иметь одну из следующих форм:

$$1. A(t_0) = e^{\frac{\alpha + \delta - \xi}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta - \alpha}{2} + \frac{\xi}{2} & -\frac{\xi - (\delta - \alpha)}{4\lambda} \\ -\lambda[\xi + (\delta - \alpha)] & 1 + \frac{\delta - \alpha}{2} + \frac{\xi}{2} \end{pmatrix},$$

где $\frac{e^{\xi} - 1}{\xi} = 1$, $\xi \neq 0$, α и δ — произвольные функции от t_0 , а $\lambda(t_0)$ — значение на L функции, аналитической во всей плоскости, кроме изолированных точек, где она может иметь полюсы, причем такие, что функции $\frac{\Gamma^+(z) - \xi}{\lambda(z)}$ и $\{\Gamma^+(z) + \xi\} \lambda(z)$, где $\Gamma(z) = \frac{1\pi}{\pi 2i} \int_L \frac{(\delta - \alpha) dt}{t-z}$, голоморфны в D^+ , а функции $\Gamma^-(z) \cdot \lambda(z)$ и $\frac{\Gamma^-(z)}{\lambda(z)}$ голоморфны в D^- и на бесконечности обращаются в нуль.

$$2. A(t_0) = e^{\alpha(t_0)} \begin{pmatrix} 1 & \beta(t_0) \\ 0 & 1 + \xi \end{pmatrix} \text{ или } A(t_0) = e^{\alpha(t_0) - \xi} \begin{pmatrix} 1 + \xi & 0 \\ \gamma(t_0) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$, $\gamma(t_0)$ — непрерывные функции от t_0 и $\frac{e^{\xi} - 1}{\xi} = 1$, $\xi \neq 0$.

Поступило
26 I 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Fréchet, C. R., 233, 1339 (1951). ² М. Fréchet, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 1 (1952). ³ Ф. Д. Гахов, Усп. матем. наук, в. 4 (50), 3 (1952). ⁴ В. В. Морозов, Уч. зап. Казанск. гос. унив., 112, кн. 9 (1952).