

Л. А. ЛАДЫЖЕНСКИЙ

**ОБЩИЕ УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА
П. С. УРЫСОНА, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В ПРОСТРАНСТВЕ
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

(Представлено академиком П. С. Александровым 10 IV 1954)

В последние десятилетия значительное развитие получили методы исследования уравнений вида

$$\varphi(x) = \lambda A\varphi(x) + f(x) \quad (x \in G), \quad (1)$$

где A — некоторый нелинейный оператор, λ — параметр, $f(x)$ — известная, а $\varphi(x)$ — неизвестная функции, определенные на множестве G . Эти методы позволяют доказывать теоремы существования решений, теоремы о единственности решений, о существовании собственных функций, о структуре спектра, о точках бифуркации и т. д. Значительная часть методов, разработанных в последнее время, относится к случаю, когда оператор A действует и вполне непрерывен в некотором банаховом пространстве. Так как в большинстве случаев основной интерес представляют непрерывные решения уравнения (1) и непрерывные собственные функции оператора A , то при рассмотрении уравнения (1) важно знать, будет ли оператор A вполне непрерывен в пространстве C непрерывных на G функций. Иначе говоря, нужно уметь для заданных конкретных классов операторов A находить условия их полной непрерывности в пространстве C .

Для случая, когда A — линейный интегральный оператор:

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2)$$

(G — замкнутое ограниченное множество n -мерного пространства R^n), необходимые и достаточные условия полной непрерывности в пространстве C были найдены И. Радона⁽¹⁾. В настоящей работе изучается общий нелинейный интегральный оператор П. С. Урысона

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y, \varphi(y)) dy \quad (3)$$

и даются условия его полной непрерывности в пространстве C , превращающиеся в условия И. Радона в случае, когда оператор (3) является линейным.

1. Ниже через $\|x - y\|$ будет обозначаться расстояние между точками $x, y \in G$ и, соответственно, через $\|x\|$ — расстояние от точки $x \in G$ до нуля пространства R^n . Под сферой пространства C с центром в нуле θ радиуса r понимается, как обычно, множество всех таких непрерывных на G функций $\varphi(x)$, что $\max_{x \in G} |\varphi(x)| \leq r$.

При доказательстве основной теоремы существенным образом используется следующая элементарная лемма.

Лемма. Пусть функция $K(x, y, u)$ ($x, y \in G, -\infty < u < \infty$) удовлетворяет условиям:

а) для каждого $x \in G$

$$\int_G \sup_{|u| \leq M} |K(x, y, u)| dy < \infty;$$

б) для каждого $x \in G$

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ x+h \in G}} \int_G \sup_{|u| \leq M} |K(x+h, y, u) - K(x, y, u)| dy = 0,$$

где M — некоторое положительное число.

Тогда: 1) функция $F(x) = \int_G \sup_{|u| \leq M} |K(x, y, u)| dy$ ограничена; 2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что из $\|h\| < \delta$ следует

$$\sup_{x, x+h \in G} \int_G \sup_{|u| \leq M} |K(x+h, y, u) - K(x, y, u)| dy < \varepsilon.$$

Доказательство этой леммы наиболее просто вытекает из следующих соображений. Обозначим через B отображение множества G в банахово пространство E функций двух переменных $R(y, u)$ с нормой

$$\|R(y, u)\| = \int_G \sup_{|u| \leq M} |R(y, u)| dy,$$

относящее каждой точке $x \in G$ функцию $K(x, y, u) \in E$. В силу условия б) это отображение будет непрерывным. Утверждение 2) леммы следует теперь из того, что непрерывное отображение компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно⁽²⁾. Утверждение 1) вытекает из того, что функция $F(x)$ непрерывна.

Замечание. При проверке выполнения условия а) в конкретных случаях наиболее трудным является вопрос об измеримости функции $\sup_{|u| \leq M} |K(x, y, u)|$. Можно показать⁽³⁾, лемма 1), что эта функция измерима, если $K(x, y, u)$ непрерывна по u при всех $x \in G$ и почти при всех $y \in G$ и измерима по y при всех $x \in G, |u| \leq M$.

2. Теорема 1. Пусть функция $K(x, y, u)$ ($x, y \in G, -\infty < u < \infty$) удовлетворяет условиям:

а) $K(x, y, u)$ непрерывна по u при всех $x \in G$ и почти при всех $y \in G$ и измерима по y при всех $x \in G, -\infty < u < \infty$;

б) каково бы ни было положительное число a , для каждого $x \in G$

$$\int_G \sup_{|u| \leq a} |K(x, y, u)| dy < \infty;$$

в) каково бы ни было $a > 0$, для каждого $x \in G$

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ x+h \in G}} \int_G \sup_{|u| \leq a} |K(x+h, y, u) - K(x, y, u)| dy = 0.$$

Тогда оператор П. С. Урысона $\mathcal{K}$, определяемый при помощи функции $K(x, y, u)$, действует в C и вполне непрерывен.

Доказательство теоремы распадается на две части. В первую очередь при помощи леммы доказывается, что функции, принадлежащие совокупности $\{\mathcal{K}\varphi(x)\}_{\varphi \in T}$, где T — некоторый шар пространства C , равномерно ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в силу теоремы Арцела, следует компактность оператора $\mathcal{K}$.

Доказательство непрерывности оператора $\mathcal{K}$ сводится к доказательству непрерывности в нуле 0 пространства S оператора $\mathcal{K}_1$, порожденного функцией $K_1(x, y, u)$, удовлетворяющей всем условиям теоремы и такой, что $K_1(x, y, 0) \equiv 0$ ($x, y \in G$). Достаточно поэтому доказать относительно оператора $\mathcal{K}$ последнее утверждение.

Если оператор $\mathcal{K}$ не непрерывен в точке 0, то существует последовательность непрерывных на G функций $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in G} |\varphi_n(x)| = 0$, но

$$\|\mathcal{K}\varphi_n(x)\| = \max_{x \in G} \left| \int_G K(x, y, \varphi_n(y)) dy \right| > \alpha \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где α — некоторое положительное число. Пусть $M = \max_n \max_{x \in G} |\varphi_n(x)|$.

Вследствие компактности оператора $\mathcal{K}$ из последовательности $\mathcal{K}\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) можно выбрать подпоследовательность $\mathcal{K}\varphi_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$), равномерно сходящуюся на G к непрерывной функции $h(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \max_{x \in G} |h(x)| &\geq \max_{x \in G} \left| \int_G K(x, y, \varphi_{n_k}(y)) dy \right| - \\ &- \max_{x \in G} \left| \int_G K(x, y, \varphi_{n_k}(y)) dy - h(x) \right| \geq \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует существование точки $x_0 \in G$ такой, что $|h(x_0)| \geq \alpha/2$. Следовательно, при достаточно больших k

$$\left| \int_G K(x_0, y, \varphi_{n_k}(y)) dy \right| \geq h(x_0) - \left| \int_G K(x_0, y, \varphi_{n_k}(y)) dy - h(x_0) \right| \geq \frac{\alpha}{4}.$$

Но, с другой стороны, почти всюду $\lim_{k \rightarrow \infty} K(x_0, y, \varphi_{n_k}(y)) = 0$ (в силу условия а)), и $|K(x_0, y, \varphi_{n_k}(y))| \leq \sup_{|u| \leq M} |K(x_0, y, u)| \in L$ (в силу условия б)). Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_G K(x_0, y, \varphi_{n_k}(y)) dy \right| = 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

3. В случае, когда $K(x, y, u) = K(x, y) \cdot u$, условия а), б), в) теоремы 1 превращаются в условия Радона⁽¹⁾ полной непрерывности линейного интегрального оператора в пространстве S , которые не только достаточны, но и необходимы.

В случае, когда $K(x, y, u) = K(x, y)f(y, u)$, оператор (3) П. С. Урысона превращается в так называемый оператор Гаммерштейна

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y)f(y, \varphi(y)) dy. \quad (4)$$

Отметим два вытекающие из теоремы 1 критерия полной непрерывности в S оператора Гаммерштейна.

Теорема 2. Пусть функция $f(y, u)$ измерима по u и непрерывна по y почти при всех $y \in G$, причем при этих y для любого $a > 0$ найдется такое число $F(a)$, что

$$|f(y, u)| \leq F(a) \quad (|u| \leq a).$$

Тогда, если линейный интегральный оператор (2), определенный ядром $K(x, y)$, вполне непрерывен в C , то и оператор (4) Гаммерштейна также действует в C и вполне непрерывен.

Теорема 3. Пусть функция $f(y, u)$ непрерывна по u и почти при всех $y \in G$, причем каждому $a > 0$ отвечает такое число $F(a)$, что

$$\left\{ \int_G |f(y, \varphi(y))|^p dy \right\}^{1/p} \leq F(a)$$

для всех функций $\varphi(y) \in C$ таких, что $\max_{y \in G} |\varphi(y)| \leq a$.

Пусть функция $K(x, y)$ удовлетворяет условиям: 1) для каждого $x \in G$ функция $|K(x, y)|^q$ измерима и суммируема по y ; 2) для каждого $x \in G$

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \int_G |K(x+h, y) - K(x, y)|^q dy = 0,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Тогда оператор (4) действует в C и вполне непрерывен.

Доказательство последних двух теорем заключается в проверке выполнения условий теоремы 1.

4. Наиболее естественное и простое достаточное условие ⁽⁴⁾ полной непрерывности оператора Урысона в пространстве C заключается в том, что функция $K(x, y, u)$ непрерывна по всем переменным в совокупности. Этот признак полной непрерывности вытекает, очевидно, и из теоремы 1. В. М. Дубровский ⁽⁵⁾ указал достаточные условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона в C , не предполагая замкнутости множества G . Для случая, когда G замкнуто, теорема В. М. Дубровского вытекает из теоремы 1, причем некоторые условия В. М. Дубровского оказываются лишними.

Молотовский горный институт

Поступило
1 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Радон, Усп. матем. наук, в. 1 (1936). ² Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937. ³ М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, Тр. Московск. матем. общ., 3 (1954). ⁴ В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 41, 655 (1934). ⁵ В. М. Дубровский, Уч. зап. МГУ, 30, 83 (1939).