

С. Н. КРАЧКОВСКИЙ

О РАСШИРЕННОЙ ОБЛАСТИ СИНГУЛЯРНОСТИ ОПЕРАТОРА

$$T_{\lambda} = E - \lambda A$$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 IV 1954)

Рассмотрим линейный ограниченный оператор A , определенный на банаховом пространстве R и отображающий его в себя. Малые буквы $x, y, \dots$ будут, как обычно, обозначать элементы пространства R , а большие $X, Y, \dots$ — элементы (функционалы) сопряженного пространства R^* . Пусть $T_{\lambda} = E - \lambda A$, где E — тождественный оператор, λ — комплексный параметр. Обозначим через Φ'_A множество тех точек комплексной плоскости λ , для которых: 1) оператор T_{λ} нормально разрешим; 2) число линейно независимых собственных элементов конечно либо для оператора A либо для сопряженного оператора A^* . Очевидно, область S_A , рассмотренная в (1), содержится в Φ'_A .

1. Возьмем какую-нибудь точку $\lambda_0 \in \Phi'_A$ и примем для определенности, что для уравнения $T_{\lambda_0} x = 0$ число линейно независимых решений конечно, а для уравнения $T_{\lambda_0}^* X = 0$ бесконечно. Все линейно независимые нульэлементы оператора A , соответствующие значению λ_0 , могут быть тогда расположены в таблицу, состоящую из p конечных и s бесконечных строк, подобно тому как это сделано в (1) для $\lambda_0 \in S_A$. Обратимся к нульэлементам (нульфункционалам) оператора A^* , соответствующим значению λ_0 . Так как, по предположению, индекс оператора T_{λ_0} равен $-\infty$, то использовать теорему об индексе итерированных операторов, как в (1), не представляется возможным. Будем поступать следующим образом. Пусть

$$x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^{r_k}; \quad r_k \geq r_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

конечные строки нульэлементов оператора A , отвечающих значению λ_0 и связанных соотношениями

$$T_{\lambda_0} x_k^1 = 0, \quad T_{\lambda_0} x_k^2 = -x_k^1, \dots, T_{\lambda_0} x_k^{r_k} = -x_k^{r_k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Так как уравнение $T_{\lambda_0} x = -x_k^{r_k}$ неразрешимо, то найдется собственный элемент оператора A^* — функционал $X_k^{r_k}$ такой, что $X_k^{r_k}(x_k^{r_k}) \neq 0$. При этом перераспределением элементов в таблице (1) и комбинированием найденного функционала с построенными перед тем функционалами $X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \dots, X_{k-1}^{r_{k-1}}$ можно добиться того, чтобы $X_k^{r_k}$ был равен 1 на элементе $x_k^{r_k}$, а на всех остальных нульэлементах оператора A обращался в 0. Выполнив это построение для всех значений k , переходим в случае $r_k > 1$ к уравнению $T_{\lambda_0} X = -X_k^{r_k}$. Его решение $X_k^{r_k-1}$ будет удовлетворять условию $X_k^{r_k-1}(x_k^{r_k-1}) = 1$ и, кроме того, добавляя к решению надлежаще подобранную линейную комбинацию из $X_1^{r_1}, X_2^{r_2}, \dots, X_p^{r_p}$, можно сделать так, чтобы функционал $X_k^{r_k-1}$ обращался в нуль на всех остальных нульэлементах оператора A . Далее,

в случае $r_k > 2$ переходим к уравнению $T_{\lambda_k}^* X = -X_k^{r_k-1}$ и т. д., пока не будет построен функционал X_k^1 , равный 1 на элементе X_k^1 и равный нулю на остальных нульэлементах. Далее продолжать этот процесс нельзя, так как уравнение $T_{\lambda_k}^* X = -X_k^1$ неразрешимо. Прделав указанное для всех значений k , получим таблицу

$$X_k^1, X_k^2, \dots, X_k^{r_k} \quad (k = 1, 2, \dots, p) \quad (2)$$

конечных строк нульэлементов оператора A^* , соответствующих значению λ_0 . Эта таблица биортогональна таблице (1).

Пусть Y_1 — какой-нибудь собственный элемент (функционал) оператора A^* , соответствующий значению λ_0 и линейно независимый с $X_1^1, X_2^1, \dots, X_p^1$. Прибавляя к Y_1 линейную комбинацию из $X_1^1, X_2^1, \dots, X_p^1$, можно построить собственный элемент X_{p+1}^1 оператора A^* , возглавляющий бесконечную строку нульфункционалов. Последнее означает, что существует последовательность функционалов $X_{p+1}^1, X_{p+1}^2, \dots$, из которых любые два, стоящие рядом, связаны соотношением $T_{\lambda_0}^* X_{p+1}^v = -X_{p+1}^{v-1}$. Подобное построение можно проделывать для каждого собственного функционала Y_α , линейно независимого с предыдущими, так что получится бесконечная (трансфинитная) последовательность бесконечных строк для оператора A^* .

Таким образом, если $\lambda_0 \in \Phi_A$, то таблице конечных строк нульэлементов оператора A соответствует в точности такая же (с тем же числом строк и с тем же числом элементов в каждой строке) таблица нульэлементов сопряженного оператора A^* , а все остальные линейно независимые нульэлементы оператора A^* могут быть расположены в бесконечные строки.

Этот результат был установлен в (1) для области $S_A \subset \Phi_A$ при помощи известной теоремы об индексе итерированного оператора. Отметим, что использованный сейчас метод биортогонализации, приводящий к упомянутому результату, делает эту теорему совсем очевидной.

2. Перейдем к рассмотрению нульэлементов операторов A и A^* для различных значений $\lambda \in \Phi_A$. Напомним прежде всего, что каждая бесконечная строка нульэлементов оператора A или A^* , соответствующая значению λ_0 , порождает степенной ряд, расположенный по степеням $\lambda - \lambda_0$, сумма которого дает собственный элемент в некоторой окрестности точки λ_0 . Имея в виду оценку (2), стр. 17, членов таких рядов, заключаем, что существует общий всем рядам круг сходимости с центром в точке λ_0 . Поскольку мы предположили, что индекс оператора T_{λ_0} равен $-\infty$, сказанное приводит к выводу, что существует круг $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, каждой точке которого (кроме точки λ_0 , если $p \neq 0$) соответствует конечное число s линейно независимых собственных элементов* оператора A и бесконечное число $r = \infty$ линейно независимых собственных элементов (функционалов) оператора A^* . К аналогичному выводу приходим и в случае, когда индекс оператора T_{λ_0} равен $+\infty$; в этом случае число r будет конечно, а s бесконечно. Случай, когда оба числа s и r конечны, был рассмотрен в (1).

Существование указанного выше круга доказывает, что множество Φ_A является открытым в комплексной плоскости λ .

* Это обстоятельство может быть установлено, как и в (1). Отметим, однако, что можно дать другой вариант доказательства (одинаковый для A и A^*), который не использует теоремы о постоянстве индекса оператора T_λ ((3), стр. 11) в фиксированной компоненте области S_A . Напротив, эта теорема получилась бы как непосредственное следствие постоянства чисел s и r , разностью которых является индекс оператора T_λ .

Возьмем какую-нибудь связную компоненту G области Φ'_A . Принимая во внимание лемму Гейне — Бореля, заключаем, что всякой точке $\lambda \in G$ соответствует одно и то же число s бесконечных строк нульэлементов оператора A и одно и то же число r бесконечных строк для оператора A^* . При этом одно из чисел s или r может быть бесконечным.

Итак, область Φ'_A получается не расширением компонент, составляющих область S_A , а добавлением к S_A новых компонент, в каждой из которых числа s и r постоянны, причем одно из них равно ∞ . Что касается числа p , то оно может быть отлично от нуля только для изолированных точек в Φ'_A .

3. Рассмотрим конечномерный оператор A_0 , определенный равенством

$$A_0 x = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{k=1}^p [x_k^1 X_k^{r_k}(x) + (x_k^2 + x_k^1) X_k^{r_k-1}(x) + \dots + (x_k^{r_k} + x_k^{r_k-1}) X_k^1(x)], \quad (3)$$

и оператор $A_1 = A - A_0$. Нетрудно видеть, что операторы A_0 и A_1 ортогональны ($A_0 A_1 = A_1 A_0 = 0$) и что A_1 имеет в точности те же нульэлементы, что и оператор A , за исключением тех нульэлементов последнего, которые записаны в таблице (1).

Обозначим через M'_A совокупность тех компонент области Φ'_A , которым соответствует значение $s = 0$. Область M'_A будем называть обобщенной областью мероморфности оператора A . Она включает в себя область мероморфности M_A , изученную С. М. Никольским ((4), стр. 155). Пусть G — какая-нибудь компонента области M'_A и $\lambda \in G$. Если число p , соответствующее значению λ , равно 0, т. е. λ не является собственным значением оператора A , то оператор T_λ непрерывно обратим и имеет область значений подпространство R_λ , состоящее из тех элементов, на которых обращаются в нуль все функционалы X , удовлетворяющие уравнению $T_\lambda X = 0$. Оператор $\Gamma_\lambda = A T_\lambda^{-1} = T_\lambda^{-1} A$ будем, как обычно, называть резольвентой оператора A , соответствующей значению λ . Областью определения оператора Γ_λ является подпространство R_λ . Это подпространство меняется в известном смысле непрерывно, когда λ пробегает точки компоненты G , исключая те из них, для которых $p \neq 0$. Если $y \in R_\lambda$, то решение уравнения $T_\lambda x = y$ можно записать, как обычно, в виде $x = y + \lambda \Gamma_\lambda y$.

Рассмотрим теперь случай, когда число p , соответствующее значению λ_0 , отлично от 0. Запишем оператор A в виде $A = A_0 + A_1$, где A_0 и A_1 определены, как было указано выше. Пусть Γ_λ^0 и Γ'_λ суть резольвенты, соответственно, операторов A_0 и A_1 . Очевидно, Γ_λ^0 не существует в точке λ_0 , но существует в некоторой окрестности этой точки, тогда как Γ'_λ существует как в самой точке λ_0 , так и в ее окрестности. В силу ортогональности операторов A_0 и A_1 резольвента Γ_λ оператора A выразится в виде суммы $\Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda^0 + \Gamma'_\lambda$.

Найдем выражение Γ_λ^0 в окрестности точки λ_0 . Прежде всего отметим, что так как $\Gamma_\lambda^0 = A_0 (E - \lambda A_0)^{-1} = A_0 (T_\lambda^0)^{-1}$, то Γ_λ^0 есть конечномерный оператор, отображающий пространство R на множество нульэлементов оператора A_0 . Значения $\Gamma_\lambda^0(x_k^v)$ ($v = 1, 2, \dots, r_k$) можно вычислить непосредственно. Именно:

$$\Gamma_\lambda^0(x_k^1) = \frac{x_k^1}{\lambda_0 - \lambda}, \quad \Gamma_\lambda^0(x_k^2) = \frac{x_k^2 + x_k^1}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{\lambda x_k^1}{(\lambda_0 - \lambda)^2}, \dots, \quad (4)$$

$$\Gamma_\lambda^0(x_k^{r_k}) = \frac{x_k^{r_k} + x_k^{r_k-1}}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{\lambda(x_k^{r_k-1} + x_k^{r_k-2})}{(\lambda_0 - \lambda)^2} + \dots + \frac{\lambda^{r_k-2}(x_k^2 + x_k^1)}{(\lambda_0 - \lambda)^{r_k-1}} + \frac{\lambda^{r_k-1} x_k^1}{(\lambda_0 - \lambda)^{r_k}}.$$

Имея далее в виду, что $(\Gamma_\lambda^0)^*$ есть резольвента сопряженного оператора A_0^* , заключаем, что $(\Gamma_\lambda^0)^*$ отображает сопряженное пространство R^* на множество нульэлементов оператора A_0^* . Отсюда, принимая во внимание (4), получаем:

$$\Gamma_\lambda^0(x) = \sum_{k=1}^p \sum_{v=1}^{r_k} X_k'^{k+1-v}(x) \Gamma_\lambda^0(x_k^v), \quad (5)$$

т. е. резольвента оператора A_0 есть полином от $(\lambda_0 - \lambda)^{-1}$, степень которого равна наибольшему из чисел r_k ($k = 1, 2, \dots, p$).

Таким образом, в окрестности всякой точки $\lambda_0 \in M_A'$ резольвента оператора A может быть представлена в виде суммы

$$\Gamma_\lambda = \Gamma_\lambda^0 + \Gamma_\lambda', \quad (6)$$

где оба слагаемых имеют смысл для всех значений λ в некоторой окрестности точки λ_0 ; при этом Γ_λ' в отличие от Γ_λ^0 существует и в самой точке λ_0 . Оператор Γ_λ' определен на подпространстве R_λ , меняющемся при изменении λ . Конечномерный оператор Γ_λ^0 определен на всем пространстве R и отображает его на множество нульэлементов оператора A , соответствующих значению λ_0 .

Отметим, что строение оператора Γ_λ^0 в точности соответствует строению канонической резольвенты в теории интегральных уравнений Фредгольма ((5), стр. 84).

Если ограничиться рассмотрением области мероморфности M_A (вместо M_A'), то оператор Γ_λ' будет определен на всем R и может быть в окрестности точки λ_0 разложен в степенной ряд по положительным степеням $\lambda - \lambda_0$. Разложение (6) будет в этом случае лорановским разложением резольвенты, рассмотренным в (4), стр. 157. Отличие будет только в том, что формула (5), определяющая главную часть этого разложения, дает детальное строение главной части при помощи нульэлементов оператора A .

Поступило
1 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Крачковский, ДАН, 91, № 5 (1953). ² М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, ДАН, 86, № 1 (1952). ³ Ф. В. Аткинсон, Матем. сборн., 28 (70):1 (1951). ⁴ С. М. Никольский, Изв. АН СССР, 7, № 3 (1943). ⁵ Э. Гурса, Курс математического анализа, 3, ч. 2, 1934.