

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

**О НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ В ТЕОРИИ
ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 IV 1954)

1. Рассмотрим многочлены $\{P_n(z)\}$, ортогональные на единичной окружности

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(e^{i\theta}) \overline{P_m(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = \delta_{mn}, \quad P_n(z) = \alpha_n z^n + \dots, \quad (1)$$

относительно некоторого обложения $d\sigma(\theta)$; введем также функции второго рода ⁽¹⁾

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} P_n(e^{i\theta}) d\sigma(\theta) = \frac{2z^n}{\alpha_n c_0} + O(z^{n+1}), \quad |z| < 1, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma(\theta), \quad (2)$$

являющиеся коэффициентами формального разложения

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \sim c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P_n(\overline{\zeta})} Q_n(z), \quad \zeta \neq z. \quad (3)$$

Теорема 1. 1) В области $|z| < 1$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z) = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n(z)|^2 < \infty; \quad (4)$$

2) существует подпоследовательность $\{n_\nu\}$, для которой имеет место предельное соотношение

$$c_0 \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{P_{n_\nu}^*(z) Q_{n_\nu}(z)}{z^{n_\nu}} \right\} = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta), \quad |z| < 1, \quad P_k^*(z) = z^k \overline{P_k\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (5)$$

где $\psi(\theta)$ — неубывающая в $[0, 2\pi]$ функция с бесчисленным множеством точек роста, к которой сходится в основном подпоследовательность функций

$$\psi_{n_\nu}(\theta) = \int_0^\theta |P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta), \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi_{n_\nu}(\theta) = \psi(\theta); \quad (6)$$

3) при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} \lg \sigma'(\theta) d\theta > -\infty \quad (7)$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{Q_n(z)}{z^n} \right\} = \frac{2}{c_0 \pi(z)}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} |P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) = \theta, \quad |z| < 1, \quad (8)$$

где $\pi(z)$ — аналитическая функция, регулярная в области $|z| < 1$; при этом разложение (3) сходится при $|\zeta| < 1$, $|z| < 1$, $\zeta \neq z$; сходимость (6) в этом случае равномерная.

Справедливость утверждения 1) доказана в (1).

Для доказательства 2) находим произведение

$$c_0 Q_n(z) \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} P_n(\zeta) \left\{ \bar{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{P}_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right\} d\sigma(\theta) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} |P_n(\zeta)|^2 d\sigma(\theta) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\psi_n(\theta), \quad \zeta = e^{i\theta}; \quad (9)$$

пользуясь обеими теоремами Хелли, приходим к (5), причем функция $\psi(\theta)$ определяется из (6).

Воспользовавшись формулами (1)

$$Q_0(z) P_n(z) + \Omega_n(z) = Q_n(z), \quad \Omega_n(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \{P_n(\zeta) - P_n(z)\} d\sigma(\theta), \\ P_n^*(z) \Omega_n(z) + P_n(z) \Omega_n^*(z) = \frac{2z^n}{c_0}, \quad \zeta = e^{i\theta}, \quad (10)$$

а также неравенством (1)

$$|\delta_n(z)| \leq \frac{4|z|^{n+1}}{(1-|z|^2) \sum_{k=0}^n |P_k(z)|^2}, \quad \delta_n(z) = Q_0(z) - \frac{\Omega_n^*(z)}{P_n^*(z)}, \quad |z| < 1, \quad (11)$$

мы легко находим

$$c_0 \frac{Q_n(z) P_n^*(z)}{z^n} = 2 + c_0 \lambda_n(z), \quad |\lambda_n(z)| \leq \frac{4|z| |P_n(z) P_n^*(z)|}{(1-|z|^2) \sum_{k=0}^n |P_k(z)|^2}, \quad |z| < 1. \quad (12)$$

Так как имеем (1)

$$\frac{|P_n(z) P_n^*(z)|}{(1-|z|^2) \sum_{k=0}^n |P_k(z)|^2} \leq \frac{|P_n^*(z)|^2}{|P_n^*(z)|^2 - |z P_n(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2} \frac{1}{\left| \frac{P_n(z)}{P_n^*(z)} \right|^2} < \frac{1}{1-|z|^2}, \\ |z| < 1,$$

то в общем случае справедливо неравенство

$$c_0 \left| \frac{Q_n(z) P_n^*(z)}{z^n} \right| \leq 2 + \frac{4|z| c_0}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1; \quad (13)$$

если же существует интеграл (7), то имеем ⁽¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^*(z) = \pi(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(z) = 0, \quad |z| < 1, \quad (14)$$

откуда вытекает (8); так как из сопоставления (5) с (14) и (12) мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi(\theta) = 1, \quad |z| < 1,$$

то отсюда находим $\psi(\theta) = 0$. Равномерность сходимости вытекает из теоремы Поля (3).

Сходимость разложения (3) при условии (7) вытекает из сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Q_k(z)|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |P_k(z)|^2, \quad |z| < 1, \quad (15)$$

первый из которых сходится всегда, а второй при условии (7).

2. Формулу (8) интересно сопоставить с предельным соотношением

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |P_{n_i}^*(e^{i\theta})|^2 = \frac{1}{\sigma'(\theta)}, \quad (16)$$

имеющим место почти всюду в $[0, 2\pi]$ при выполнении (7), а также с предельным соотношением

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{|P_{n_k}^*(e^{i\theta})|^2} = \sigma(\theta), \quad (17)$$

справедливым независимо от (7).

Из (15) — (17) и из теоремы Поля (3) о равномерной сходимости вытекает

Теорема 2. *Существует подпоследовательность многочленов $\{P_{n_\nu}(z)\}$, для которой существуют пределы*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{|P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2} \right\} = \frac{\sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}, \quad (18)$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) \right\} = 1, \quad (18')$$

где $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$ — произвольный отрезок, причем (18) справедливо, если функция $\sigma(\theta)$ непрерывна, (18') — при условии (7).

3. Рассмотрим теперь теорему, устанавливающую некоторую зависимость между ограниченностью бесконечной подпоследовательности многочленов $\{P_{n_\nu}(z)\}$ и свойствами функции $\sigma(\theta)$.

Теорема 3. 1) *Если существует бесконечная подпоследовательность многочленов $\{P_{n_\nu}(z)\}$, равномерно ограниченная сверху*

$$|P_{n_\nu}(z)| \leq M, \quad |z| \leq 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (19)$$

то справедливо неравенство

$$\sigma(\theta_2) - \sigma(\theta_1) \geq \frac{\theta_2 - \theta_1}{M^2}, \quad [\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]; \quad (20)$$

обратно, из этого последнего неравенства вытекает

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |P_{n_v}(e^{i\theta})|^2 d\theta} \leq M; \quad (21)$$

2) из равномерной ограниченности снизу

$$|P_{n_v}^*(e^{i\theta})| \leq m, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (22)$$

вытекает абсолютная непрерывность, а из неравенств

$$|P_{n_v}(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{V_{n_v}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (v = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

непрерывность функции $\sigma(\theta)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Справедливость 1) вытекает из (17) и (18'); справедливость 2) доказана в (1, 2).

Примечание. Вместо (22) достаточно поставить менее ограничительное условие

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|P_{n_v}^*(e^{i\theta})|^2} \Phi \left\{ \frac{1}{|P_{n_v}^*(e^{i\theta})|} \right\} d\theta < A, \quad A = \text{const}, \quad (24)$$

где функция $\Phi(u)$ положительна, возрастает и стремится к бесконечности вместе с u . Действительно, на основании теоремы Валле-Пуссена условие (24) обеспечивает равномерную абсолютную непрерывность функций (17), откуда вытекает

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{|P_{n_v}^*(e^{i\theta})|^2} = \int_0^{\theta} \sigma'(\theta) d\theta = \sigma(\theta). \quad (25)$$

Поступило
6 IV 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Л. Геронимус, Сообщ. Харьковск. матем. общ., сер. 4, 19, 35 (1938).
² Я. Л. Геронимус, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 2, 123 (1950). ³ G. Pólya, Math. Zs., 8, 171 (1920).