

М. К. ГАВУРИН

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ
ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 IV 1954)

В нашей заметке ^{(1)*} были даны оценки для отклонения собственного числа λ и собственного вектора φ возмущенного оператора $A = A_0 + B$ от соответствующих собственного числа λ_0 и собственного вектора φ_0 исходного оператора A_0 . При этом предполагалось, что возмущение B ограничено (для простоты предполагалась также ограниченность A_0 , что несущественно). Сверх того требовалось, чтобы φ_0 совпадало с собственным вектором ψ_0 оператора A_0^* при собственном числе $\bar{\lambda}_0$. Последнее требование практически ограничивало применение полученных оценок лишь нормальными (в частности, самосопряженными) операторами A_0 .

Ниже формулируется более общая теорема, в которой это ограничительное требование отброшено. Эта теорема полностью покрывает теорему из ^{(1)**}.

Пусть H есть гильбертово пространство. Для произвольного оператора M будем обозначать через D_M область его задания, которую мы всегда будем считать плотной в H . Через H_θ будем обозначать ортогональное дополнение элемента θ .

Предположим теперь, что в H заданы линейные операторы A_0 и B , причем оператор B ограничен.

Теорема. Пусть:

I. λ_0 есть простое собственное число оператора A_0 с нормированным собственным вектором φ_0 , а $\bar{\lambda}_0$ есть простое собственное число оператора A_0^* с нормированным собственным вектором ψ_0 .

II. Оператор $A_0 - \lambda_0$, рассматриваемый на $H_{\varphi_0} \cap D_{A_0}$, имеет ограниченный обратный R , определенный на H_{ψ_0} .

III. $\gamma_0 = |(\varphi_0, \psi_0)| > 0$.

IV. $s \equiv \|B\| \|R\| < S \equiv \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{2}$.

Тогда ближайшей к λ_0 точкой спектра оператора $A = A_0 + B$ является простое собственное число $\lambda = \lambda_0 + \mu$ с соответствующим собственным вектором φ , причем $(\varphi, \varphi_0) \neq 0$; $\bar{\lambda}$ является простым собственным числом оператора A^* с соответствующим собственным вектором ψ , причем $(\psi, \psi_0) \neq 0$.

Сверх того, имеют место следующие утверждения:

* В ⁽¹⁾ доказательства отсутствуют. Они приведены в ⁽²⁾.

** М. З. Соломяк ⁽³⁾ обобщил теорему ⁽¹⁾ на случай кратного собственного числа. При этом, однако, как исходный оператор A_0 , так и возмущенный A предполагались самосопряженными.

1) Если нормировать φ условием $(\varphi, \varphi_0) = 1$, то

$$\|\varphi - \varphi_0\| \leq \frac{\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 4s^2 - 4s\sqrt{1 - \gamma_0^2}}}{2(s + \sqrt{1 - \gamma_0^2})} < \frac{\gamma_0}{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}},$$

и та же оценка годится для $\|\psi - \psi_0\|$. Постоянная (относительно s) $\frac{\gamma_0}{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}$ не может быть заменена на меньшую.

2) $|\mu| \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} \|B\|$. Постоянная $\frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0}$ не может быть заменена на меньшую.

3) Если $\lambda' = \lambda_0 + \mu'$ есть отличная от λ точка спектра оператора A , то

$$|\mu'| \geq \left(\frac{\gamma_0}{s} - \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} \right) \|B\| = \frac{\gamma_0}{\|R\|} - \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} \|B\|.$$

Линейная относительно $1/s$ функция в скобках не может быть заменена на другую линейную функцию, большую хотя бы для одного значения s из промежутка $(0, S)$.

4) Если G есть связная окрестность нуля в плоскости комплексной переменной t и $B = B(t)$ есть регулярная однозначная функция t в G , причем $B(0) = 0$ и в области G $s = s(t) < S$, то $\mu = \mu(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ ($(\varphi(t), \varphi_0) = 1$) суть регулярные в G функции. Постоянная S не может быть заменена на большую (в том смысле, что утверждение перестает, вообще говоря, быть верным, если хоть в одной точке G $s \geq S$).

Доказательство мы наметим лишь в самых общих чертах.

Предполагается, что оператор B регулярно зависит от комплексного параметра t в некоторой связной окрестности G точки $t = 0$ (например, B заменяется на tB), и рассуждениями, аналогичными приведенным у Реллиха ⁽⁴⁾ (см. также ⁽²⁾), устанавливается существование $\mu = \mu(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ для t достаточно малых, причем имеют место равенства (оператор R предполагается распространенным на все пространство H при помощи равенства $R\psi_0 = 0$):

$$\varphi - \varphi_0 = R(\mu - B)\varphi; \quad (1)$$

$$((\mu - B)\varphi, \psi_0) = 0. \quad (2)$$

В обозначениях

$$\gamma = |(\varphi, \psi_0)|, \quad u = \|\varphi - \varphi_0\|, \quad v = \frac{|\mu|}{\|B\|}$$

из (1) и (2) выводятся неравенства

$$\gamma \geq \gamma_0 - u\sqrt{1 - \gamma_0^2};$$

$$u \leq s[v\sqrt{u^2 + 1 - \gamma^2} + \sqrt{u^2 + 1 - v^2\gamma^2}]; \quad (*)$$

$$v \leq \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{\gamma}.$$

Исследование этой системы неравенств приводит к оценкам 1 и 2. При помощи этих последних и условия IV доказывается аналитическая продолжимость $\mu(t)$ и $\varphi(t)$ на всю область G . Если λ' — отличная

от λ точка спектра $A_0 + B(t)$ (при некотором фиксированном t из G), то в простейшем случае, когда λ' есть собственное число с собственным вектором φ' (не обязательно единственным), мы вводим величины γ', u', v' (в очевидных обозначениях). Для этих величин также справедливы неравенства (*). Сверх того, имеется равенство $(\varphi', \psi) = 0$, из которого следует, что

$$u' \geq \frac{\gamma_0}{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}.$$

Присоединяя это неравенство к (*), выводим при помощи полученной системы неравенства 3).

Окончательный характер полученных оценок (при сохранении их формы, конечно) связан с тем, что неравенства 2) и 3) не препятствуют совпадению ближайшего к λ_0 собственного числа λ оператора A с другой точкой спектра этого оператора при $s = S$. Действительно, можно подобрать пример (в двумерном пространстве), в котором при $s = S$ два собственных числа сольются. В этом примере и осуществляются оценки 1) — 3) (при $s = S$).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
26 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. К. Гавурин, ДАН, 76, № 6 (1951). ² М. К. Гавурин, Вестн. Ленинградск. унив., № 9 (1952). ³ М. З. Соломяк, ДАН, 90, № 1 (1953). ⁴ F. Rellich, Math. Ann., 113, H. 4 (1936).