

А. Г. ВИТУШКИН

ВАРИАЦИИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ИХ ОГРАНИЧЕННОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 III 1954)

Пусть $t = f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ есть функция, определенная на подмножестве $\mathcal{E}$ пространства E_n , и $\mathcal{E}_t$ — множество уровня t этой функции, т. е. множество всех таких точек на $\mathcal{E}$, в каждой из которых $f(X)$ принимает одно и то же значение t .

Определение 1. $f(X)$ называется измеримой (V_k) (см. (1)) функцией, если, во-первых, почти для всякого t множество $\mathcal{E}_t$ измеримо (V_{k-1}) и, во-вторых, величина $V_{k-1}(\mathcal{E}_t)$ как функция от t измерима по Лебегу. Пусть $f(X)$ измерима (V_k). Величина $V_k(f, \mathcal{E}) =$

$= V_k^n(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_{k-1}(\mathcal{E}_t) dt$ называется k -кратной вариацией функции $f(X)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Теорема 1. Если множество $\mathcal{E}$ замкнуто, а $f(X)$ непрерывна (см. определение 1), то $f(X)$ измерима (V_k) ($k = 1, 2, \dots, n$).

Замечание 1. Из того, что различные множества уровня однозначной функции попарно не пересекаются, следует, что для всякой функции $f(X)$ $V_{n+1}(f) = 0$. Поэтому $V_{n+1}(f, \mathcal{E})$ исключается из системы вариаций функции.

Теорема 2. Вариации $V_k^n(f)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) независимы, т. е. для произвольных положительных $a_k \leq +\infty$ ($k = 1, 2, \dots, n$) существует непрерывная функция $f(X)$, определенная на n -мерном замкнутом кубе, такая, что $V_k^n(f) = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Замечание 2. Из теоремы Банаха следует, что для непрерывной функции $f(x_1)$, определенной на отрезке, однократная вариация $V_1^1(f)$ численно равна изменению $f(x_1)$ на этом отрезке. Из определения 1 следует, что однократная вариация $V_1^2(f)$ функции $f(x_1, x_2)$ тождественна линейной вариации А. С. Кронрода. Можно доказать, что $V_2^2(f)$ функции $f(x_1, x_2)$, определенной на квадрате с точностью до множителя, не зависящего от функции, равна вариации А. С. Кронрода.

В заметке отыскиваются минимальные достаточные условия для ограниченности k -кратной вариации функции n переменных.

Пусть $t = f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ есть действительная функция n переменных, определенная на n -мерном замкнутом кубе I_n n -мерного евклидова пространства E_n .

Определение 2. Компонента D множества уровня t непрерывно дифференцируемой функции $f(P)$ называется типичной, если D не пересекается с границей куба I_n и в каждой точке P , принадлежащей D , $|\text{grad } f(P)| > 0$.

Лемма 1. Типичная компонента множества уровня непрерывно дифференцируемой функции n переменных есть $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие без края, лежащее в I_n .

Лемма 2. Теоретико-множественная сумма K всех типичных компонент всех множеств уровня непрерывно дифференцируемой функции есть множество открытое как в I_n , так и во всем пространстве.

Определение 3. Компоненту в теоретико-множественном смысле множества K (см. лемму 2) назовем кольцом и обозначим через K_i ($i = 1, 2, \dots$).

Теорема 3. Граница кольца K_i состоит из двух компонент, одна из которых отделяет другую от бесконечности. При этом на каждой из компонент указанной границы функция $f(P)$ постоянна и равна либо верхней либо нижней грани значений $f(P)$ на кольце K_i .

Теорема 4. На внутренней границе кольца K_i существует точка O_i такая, что $|\text{grad } f(O_i)| = 0$.

Лемма 3. Если две точки, не принадлежащие кольцу K_i , разделены этим кольцом, то они разделены каждой из компонент его границы.

Определение 4. Пусть $\Xi = K_1, K_2, \dots, K_m$ есть конечная система колец, соответствующих функции $f(P)$ от n переменных ($n > 1$); $K_1^*, \dots, K_\mu^*$ — последовательность вложенных друг в друга колец из Ξ (h_i^* есть колебание $f(P)$ на K_i^* ($i = 1, 2, \dots, \mu$)). Сумму

$S_\alpha^* = \sum_{i=1}^{\mu} K_i^*$ произвольной последовательности вложенных друг в друга колец ($K_i^* \subset \Xi$, $i = 1, \dots, \mu$) будем называть связкой системы Ξ , а $H_\alpha^* = \sum_{i=1}^{\mu} h_i^*$ — параметром связки S_α^* ($\alpha \leq 2^m$). Положим

$H_1 = \max H_\alpha^*$. Связку S_α^* системы Ξ будем называть полной (в Ξ), если соответствующий ей параметр $H_\alpha^* = H_1$. Пусть S_1 есть одна из полных (в Ξ) связок системы Ξ ; Ξ_1 — совокупность всех колец из Ξ , не вошедших в S_1 ; S_2 — одна из полных (в Ξ_1) связок системы Ξ_1 и т. д. Таким образом, Ξ распадается на конечное число связок $S_1, S_2, \dots, S_{m_0}$ (H_i — параметр связки S_i , $i = 1, 2, \dots, m_0$). Произведенное разбиение системы Ξ на связки $S_1, \dots, S_{m_0}$ называется регулярным.

При $n = 1$ кольцо есть интервал, и он же по определению будет называться регулярной связкой системы колец (интервалов).

Теорема 5. Пусть $f(P)$, определенная на I_n ($n > 1$), обладает частными производными порядков до $l-1$ (включительно) ($l > 0$). Пусть $f(P)$ и ее частные производные до $(l-1)$ -го порядка (включительно) удовлетворяют условию Липшица с константой L_1 . Тогда для любого разбиения всякой конечной системы Ξ колец $K_1, K_2, \dots, K_m$ на регулярные связки имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{m_0} h_i^{n/l} < C$, где C есть константа, зависящая лишь от l, n и L_1 .

Для $n = 1$ имеет место следующая теорема:

Теорема 6. Пусть $f(x)$ есть непрерывно дифференцируемая функция, определенная на единичном отрезке, имеющая $l-1$ производную, каждая из которых, так же как и сама функция $f(x)$, удовлетворяет условию Липшица с константой L_1 . Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^{n/l} \leq l \sqrt[l]{L_1}.$$

Лемма 4. Суммарное по всем уровням число экстремальных компонент множеств уровня полинома $P_m(x_1, \dots, x_n)$ степени m , заданного на кубе I_n , ограничено константой C_1 , зависящей лишь от m и n .

Рассмотрим связку S_i . Она состоит из конечного числа кольцоидов $K_1^*, K_2^*, \dots, K_s^*$, причем кольцоид K_l^* отделяет K_s^* от бесконечности при $l > s$.

Вместе с тем любая компонента множества уровня, входящая в K_l^* , отделяет K_s^* от бесконечности и всякая компонента уровня из K_s^* отделена от бесконечности K_s^* . Обозначим через $\gamma_i^1, \gamma_i^2, \dots, \gamma_i^n$ компоненты множеств уровня такие, что сумма колебаний функции $f(P)$ по всем кольцоидам, расположенным между γ_i^{h-1} и γ_i^h , равна $P_i = h_i / n \cdot 2^l$ (если γ_i^h является типичной компонентой уровня, то те две части, на которые γ_i^h разбивает кольцоид, содержащий γ_i^h , ради удобства терминологии также причисляем к кольцоидам). Обозначим через α_i^h множество всех тех точек из S_i , каждая из которых расположена между γ_i^{h-1} и γ_i^h . Пусть O_i есть некоторая точка внутренней границы самого внутреннего кольцоида из S_i , а Σ_i — замкнутый n -мерный шар радиуса $r_i = \sqrt[n]{h_i}$ с центром в O_i .

Лемма 5. Пусть $f(P)$ есть функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5. Тогда в предположении, что $L_1 < 1 / n \cdot 2^l$ и $\alpha_i' - \Sigma_i = 0$, имеем, что колебание функции $f(P)$ на α_i' не менее, чем P_i / l .

Обозначим через E_i замкнутый n -мерный шар радиуса r_i с центром в точке O_i такой, что $\rho(O_i, O_i') = 10 r_i$. Из того, что константу Липшица L_1 можно считать достаточно малой*, можно заключить, что точку O_i можно выбрать так, что $\Sigma_i' - I_n = 0$.

Лемма 6. Если $f(P)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то никакая точка куба I_n не может принадлежать сразу более чем $C_1(l, n)$ (см. лемму 4) таким шарам типа Σ_i' , что $\alpha_i' - \Sigma_i = 0$.

Теорема 7. Пусть $f(P)$ есть функция, удовлетворяющая условиям теоремы 5 (при этом $l = n$). Тогда $f(P)$ имеет конечную линейную вариацию, не превосходящую некоторой константы, зависящей лишь от n и L_1 .

Из теоремы 7 при помощи математической индукции нетрудно вывести следующую теорему:

Теорема 8. Пусть $f(P)$ есть функция, определенная на замкнутом n -мерном единичном кубе, обладающая частными производными всех порядков до $n - k$ включительно, каждая из которых, так же как и сама функция $f(P)$, удовлетворяет условию Липшица с константой L_1 . Тогда k -кратная вариация функции $f(P)$ ограничена константой, зависящей лишь от n и L_1 .

Замечание 3. Сформулированные в теореме 8 достаточные условия для ограниченности k -кратной вариации по существу являются минимальными среди условий, формулируемых в терминах гладкости функции, ибо можно построить пример функции n переменных $n - k + 1$ раз дифференцируемой и имеющей бесконечную k -кратную вариацию.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Г. Витушкин, ДАН, 96, № 5 (1954).

* Это следует из того, что для всякой константы C функции $f(P)$ и $Cf(P)$ лишь одновременно имеют k -кратную вариацию конечной.