

В. И. БУРДИНА

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ
КОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 IV 1954)

В настоящей работе решается задача о вычислении действительных характеристических циклов комплексного многообразия через его комплексные циклы Штифеля, что сильно упрощает вычисление действительных характеристических циклов комплексных многообразий.

1. Действительные характеристические циклы дифференцируемого ориентируемого k -мерного многообразия M^k введены Л. С. Понтрягиным⁽¹⁾. Они строятся при помощи тангенциального отображения T , состоящего в том, что каждой касательной к M^k плоскости, ориентированной в соответствии с M^k , ставится в соответствие точка многообразия $H(k, l)$, состоящего из k -мерных ориентированных подпространств $(k + l)$ -мерного векторного пространства R^{k+l} .

Отображение T индуцирует гомоморфизм T^* кольца гомологий многообразия $H(k, l)$ в кольцо гомологий многообразия M^k . Характеристические циклы многообразия M^k суть циклы вида $T^*(z)$, где z — цикл многообразия $H(k, l)$. Многообразие $H(k, l)$ имеет размерность kl .

Прообразы характеристических Δ -циклов суть циклы из $H(k, l)$ размерностей

$$r \geq kl - k. \quad (1)$$

Пусть $0 \leq \omega(i) \leq l$, $i = 1, \dots, k$, — неубывающая целочисленная функция.

В (1,²) ей поставлен в соответствие цикл $z(\omega)$ многообразия $H(k, l)$ размерности $r(\omega) = \sum_{i=1}^k \omega(i)$. Значение i называется местом скачка функции ω , если $\omega(i+1) > \omega(i)$. Число нуль всегда считают местом скачка, а число $i = k$ — при условии $\omega(k) < l$. По определению $\omega \in \Omega$, если $\omega(1) \equiv \dots \equiv \omega(k) \pmod{2}$, $0 = i_0 \equiv i_1 \equiv \dots \equiv i_n \pmod{2}$, где $i_0, \dots, i_n$ — последовательность всех мест скачков, взятых в возрастающем порядке.

Линейно независимые базисы слабых гомологий многообразия $H(k, l)$ для размерностей (1) состоят из циклов $z(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Линейно независимые базисы гомологий по mod 2 размерностей (1) для того же многообразия состоят из циклов $z(\omega)$.

Характеристический Δ -цикл из M^k называется циклом Штифеля, если он гомологичен циклу $T^*(z(\omega))$, где $z(\omega)$ — цикл (Штифеля), для которого $\omega(1) = \dots = \omega(s) = l - 1$, $\omega(1 + s) = \dots = \omega(k) = l$. В зависимости от четности числа s циклы Штифеля берутся с целочисленными коэффициентами либо по mod 2.

2. Комплексные характеристические циклы комплексного многообразия $\mathcal{M}^k$ комплексной размерности k введены Черном ⁽³⁾. Они строятся по аналогии с действительным случаем при помощи тангенциального отображения τ многообразия $\mathcal{M}^k$ в многообразие $C(k, l)$, состоящее из линейных комплексных k -мерных подпространств комплексного $(k+l)$ -мерного векторного пространства $\mathbb{R}^{k+l}$.

Согласно ⁽⁴⁾ Δ -группы нечетных размерностей многообразия $C(k, l)$ тривиальны. Базисы гомологий размерности $2s$ состоят из циклов $z(\omega)$, определяемых (аналогично $z(\omega)$, п. 1) по функции ω , $r(\omega) = s$. Кручения отсутствуют.

Комплексный характеристический Δ -цикл называется циклом Штифеля, если он гомологичен циклу $\tau^*(z(\omega))$, где $\omega(1) = \dots = \omega(s) = l - 1$, $\omega(l + s) = \dots = \omega(k) = l$; $s = kl - r(\omega)$.

3. Решение задачи о вычислении действительных характеристических циклов комплексного многообразия основано на следующих соображениях. При разделении комплексных локальных координат $\zeta_1 + i\tau_1, \dots, \zeta_k + i\tau_k$ комплексного многообразия $\mathcal{M}^k$ на действительные и мнимые части и образовании из них действительных координат $\zeta_1, \tau_1, \dots, \zeta_k, \tau_k$ (многообразию $\mathcal{M}^k$ приписывают ориентацию, задаваемую этим порядком координат) касательное к $\mathcal{M}^k$ комплексное k -мерное линейное пространство превращается в действительное $2k$ -мерное пространство, касательное к получившемуся из $\mathcal{M}^k$ действительному многообразию. Этот же процесс расщепления координат превращает комплексное $(k+l)$ -мерное векторное пространство $\mathbb{R}^{k+l}$ в $2(k+l)$ -мерное действительное векторное пространство $\mathbb{R}^{2k+2l}$, а многообразие $C(k, l)$ погружает в $H(2k, 2l)$. При этом тангенциальное отображение τ (см. п. 2) многообразия $\mathcal{M}^k$ в $C(k, l)$ превращается в отображение многообразия $\mathcal{M}^k$, рассматриваемого как действительное $2k$ -мерное многообразие, в $H(2k, 2l)$, гомотопное (см. ⁽³⁾) тангенциальному отображению.

Таким образом, действительные характеристические циклы многообразия $\mathcal{M}^k$ можно вычислять в два приема: сначала вычислить пересечение базисных циклов многообразия $H(2k, 2l)$ с вложенным в него многообразием $C(k, l)$, именно, выразить эти пересечения через базис гомологий многообразия $C(k, l)$, а затем полученные циклы многообразия $C(k, l)$ пересекать с $\tau(\mathcal{M}^k)$. При этом действительные характеристические циклы многообразия $\mathcal{M}^k$ окажутся выраженными через его комплексные характеристические циклы, и для выражения действительных характеристических циклов многообразия $\mathcal{M}^k$ через комплексные циклы Штифеля остается выразить базисные циклы многообразия $C(k, l)$ через циклы Штифеля из $C(k, l)$. Принципиальное решение последнего вопроса содержится в ⁽³⁾, где доказывается, что всякий базисный цикл $z(\omega)$ из $C(k, l)$ является полиномом от циклов Штифеля с целочисленными коэффициентами. Ниже выводятся формулы, дающие эффективное решение вопроса.

4. По функции ω строим ступенчатую матрицу $\omega = \|\zeta_i^j\|$; $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, l$, элемент ζ_i^j которой равен нулю при $j > \omega(i)$ и отличен от нуля при $j \leq \omega(i)$. Матрица ω однозначно определяет функцию ω (индекс i указывает строку; j — столбец). Путем транспонирования матрицы ω вокруг неглавной диагонали получим матрицу $\omega^* = \varepsilon$, определяющую целочисленную функцию $\omega^*(i) \equiv \varepsilon(i)$, $i = 1, \dots, l$, $0 \leq \varepsilon(i) \leq k$, значение $\varepsilon(i)$ равно числу отличных от нуля элементов i -й строки матрицы ε .

5. Обозначим через $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_p \rangle^*$ цикл $z(\omega)$, $\omega \in \Omega$, из $H(2k, 2l)$,

функция $\omega^* = \varepsilon$ (см. п. 4, где вместо k, l следует подставить $2k, 2l$) которого принимает значения $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \alpha_1, \dots, \varepsilon(2p-1) = \varepsilon(2p) = \alpha_p, \varepsilon(2p+1) = \dots = \varepsilon(2l) = 2k$.

В этих обозначениях для циклов $z(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $\omega \neq \text{const}$, из $H(2k, 2l)$, $l \geq k$ размерностей

$$r \geq 4kl - 2k \quad (1')$$

имеет место формула разложения

$$z(\omega) = \langle \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(q) \rangle^* \approx \begin{vmatrix} \langle \varepsilon(2) \rangle^* & \langle \varepsilon(2) - 2 \rangle^* & \dots & \langle \varepsilon(2) - (q-2) \rangle^* \\ \langle \varepsilon(4) + 2 \rangle^* & \langle \varepsilon(4) \rangle^* & \dots & \langle \varepsilon(4) - (q-4) \rangle^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varepsilon(q) + q - 2 \rangle^* & \dots & \dots & \langle \varepsilon(q) \rangle^* \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\approx$ — знак слабой гомологии; определитель в правой части раскрывается по обычным правилам; под умножением подразумевается пересечение в кольце слабых гомологий, причем полагают $\langle \alpha \rangle^* = 0$, если $\alpha > 2k$ либо $\alpha < 0$ и $\langle \alpha \rangle^* = H(2k, 2l)$ (т. е. единице кольца пересечений), если $\alpha = 2k$.

6. Обозначим через $[\beta_1, \dots, \beta_s]^*$ цикл $z(\omega)$ по mod 2 из $H(2k, 2l)$, у которого функция ε (см. п. 4, где вместо k, l подставляются $2k, 2l$) принимает значения: $\varepsilon(1) = \beta_1, \varepsilon(2) = \beta_2, \dots, \varepsilon(s) = \beta_s, \varepsilon(1+s) = \dots = \varepsilon(2l) = 2k$.

Имеет место формула разложения:

$$z(\omega) = [\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(q)]^* \sim \begin{vmatrix} [\varepsilon(1)]^* & [\varepsilon(1) - 1]^* & \dots & [\varepsilon(1) - (q-1)]^* \\ [\varepsilon(2) + 1]^* & [\varepsilon(2)]^* & \dots & [\varepsilon(2) - (q-2)]^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varepsilon(q) + q - 1]^* & \dots & \dots & [\varepsilon(q)]^* \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $\sim$ — знак гомологии; определитель раскрывается по обычным правилам, под умножением подразумевается пересечение; полагают $[\alpha]^* = 0$ при $\alpha > 2k$ либо $\alpha < 0$; $[\alpha]^* = H(2k, 2l)$ при $\alpha = 2k$.

Благодаря формулам (2), (3) вычисление пересечений базисных циклов из $H(2k, 2l)$ (в силу п. 2 при рассмотрении гомологий с целочисленными коэффициентами можно ограничиться слабыми гомологиями) с $C(k, l)$ сводится к вычислению пересечений $C(k, l)$ с циклами вида $[\alpha]^*$, $\langle \alpha \rangle^*$ и циклом $z(\omega) = H(2k, 2l - 1)$, $\omega \equiv 2l - 1$.

7. Положим $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}^* = \beta(\omega) \subset C(k, l)$, где $\omega^*(i) = \varepsilon(i)$ (см. п. 1), $\varepsilon(1) = \gamma_1, \dots, \varepsilon(p) = \gamma_p; \varepsilon(p+1) = \dots = \varepsilon(k) = k$. В этих обозначениях произвольный цикл $\beta(\omega)$ из $C(k, l)$ следующим образом разлагается по циклам Штифеля:

$$\beta(\omega) = \{\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(p)\}^* \sim \begin{vmatrix} \{\varepsilon(1)\}^* & \{\varepsilon(1) - 1\}^* & \dots & \{\varepsilon(1) - (p-1)\}^* \\ \{\varepsilon(2) + 1\}^* & \{\varepsilon(2)\}^* & \dots & \{\varepsilon(2) - (p-2)\}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{\varepsilon(p) + p - 1\}^* & \dots & \dots & \{\varepsilon(p)\}^* \end{vmatrix}; \quad (4)$$

определитель раскрывается по указанным выше правилам (см. (3)).

Метод доказательства формул (2)–(4) аналогичен методу Черна⁽⁶⁾. При доказательстве применяется описываемое ниже преобразование θ .

8. Лемма. Пусть $\mathfrak{N}^{k+l}$ — эрмитово $(k+l)$ -мерное векторное пространство. отображение $\theta: \theta(X) = Y$, где X, Y — линейные подпространства из $\mathfrak{N}^{k+l}$ комплексных размерностей $\text{Dim } X = k$,

$\dim Y = l$, Y ортогонально X , является гомеоморфным отображением многообразия $C(k, l)$ на $C(l, k)$. Возникающий при этом изоморфизм $\hat{h}$ групп гомологий описывается соотношениями: $\hat{h}[\hat{z}(\omega)] \sim (-1)^{r(\omega)} \hat{z}(\omega^*)$; $\hat{z}(\omega) \subset C(k, l)$, $\hat{z}(\omega^*) \subset C(l, k)$, где ω^* определяется по ω в п. 4. Отображение $\hat{h}$ можно продолжить в гомеоморфное же отображение $\hat{h}$ многообразия $H(2k, 2l) \supset C(k, l)$ в многообразие $H(2l, 2k) \supset C(l, k)$. Возникающий при этом изоморфизм $\hat{h}$ групп слабых гомологий размерностей $(1')$ описывается соотношениями: $\hat{h}[z(\omega)] \sim (-1)^{r(\omega)/4} z(\omega^*)$; $z(\omega) \subset H(2k, 2l)$; $z(\omega^*) \subset H(2l, 2k)$, $\omega \neq \text{const}$; $\hat{h}[H(2k, 2l-1)] \sim (-1)^{kl} z(\omega')$, $\omega'(1) = 0$, $\omega'(2) = \dots = \omega'(2l) = 2k$, а изоморфизм групп гомологий по mod 2 описывается соотношениями $\hat{h}[z(\omega)] \sim z(\omega^*)$, ω^* определяется по ω в п. 4 (где вместо k, l берутся $2k, 2l$).

9. Пересечение элементарного цикла $\langle \alpha \rangle^* \subset H(2k, 2l)$ (см. п. 5) с $C(k, l)$ имеет вид:

$$C(k, l) \times \langle \alpha \rangle^* \sim \sum (-1)^{\frac{i_2 - i_1}{2}} \hat{z}(\omega); \quad \alpha \geq k > 1;$$

суммирование производится по всевозможным функциям ω , $\omega(i) \geq l-2$, $r(\omega) = kl - (2k - \alpha)$; если i_2 отсутствует, полагают $i_2 - i_1 = 0$. Пересечение цикла $z(\omega) = H(2k, 2l-1)$ с $C(k, l)$ имеет вид:

$$C(k, l) \times H(2k, 2l-1) \sim (-1)^{\frac{k(h+1)}{2}} C(k, l-1).$$

10. Пересечения элементарных гомологий $H(2k, 2l)$ по mod 2 с $C(k, l)$ для размерностей (1) описываются формулой:

$$C(k, l) \times [\delta]^* \sim \left\{ \frac{\delta}{2} \right\}^* \pmod{2}, \quad \delta \text{ четное.}$$

Она показывает, что цикл Штифеля из $H(2k, 2l)$ по mod 2 высекает в $C(k, l)$ также цикл Штифеля. Для нечетных δ $C(k, l) \times [\delta]^* \sim 0$.

Эта работа выполнена под руководством Л. С. Понтрягина, которому я выражаю глубокую благодарность.

Поступило
4 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. С. Понтрягин, ДАН, 35, 34 (1942). ² Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 21 (63), № 2 (1947). ³ S. S. Chern, Ann. of Math., 47, No. 1 (1946). ⁴ C. Ehresmann, ibid., 35, No. 2, 418 (1934). ⁵ Л. С. Понтрягин, ДАН, 47, № 4 (1945). ⁶ S. S. Chern, Ann. of Math., 49, No. 2 (1948).