

И. М. ЛИФШИЦ и А. М. КОСЕВИЧ

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ДЕ ГААЗ — ВАН АЛЬФЕНА ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 15 III 1954)

1. В настоящее время периодическая зависимость магнитной восприимчивости от поля при низких температурах (эффект де Гааз — ван Альфена) наблюдается для большого числа металлов ⁽¹⁾. Между тем, количественная теория этого явления разработана для случая электронного газа с квадратичным законом дисперсии, справедливым лишь у дна соответствующей энергетической зоны ⁽²⁾.

Представляется весьма существенным выяснение того, в какой мере особенности эффекта связаны с этим предположением. Некоторые качественные соображения по этому поводу были высказаны в последнее время в работе ⁽³⁾, однако примененный там путь рассуждений не позволяет провести полный анализ эффекта.

Известно, что при низких температурах электроны в металле, взаимодействующие друг с другом и с решеткой, в термодинамическом отношении могут быть заменены идеальным ферми-газом заряженных квази-частиц с некоторым законом дисперсии

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(p_x, p_y, p_z). \quad (1)$$

Поэтому все вычисления следует произвести для идеального газа квази-частиц с общим законом дисперсии (1). При этом первая задача, которая должна быть решена, заключается в отыскании уровней энергии такой частицы в магнитном поле.

Так как в дальнейшем нас будут интересовать в основном уровни энергии, отвечающие большим квантовым числам, то квантование движения в магнитном поле достаточно произвести в квази-классическом приближении.

Гамильтониан частицы с законом дисперсии (1) в магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном по оси z , формально получается заменой в (1) компонент импульса p_i , компонентами оператора кинетического импульса $\hat{P}_i$, связанными между собой соотношениями коммутации:

$$[\hat{P}_y, \hat{P}_x] = \frac{e}{c} H, \quad [\hat{P}_x, \hat{P}_z] = [\hat{P}_y, \hat{P}_z] = 0. \quad (2)$$

Соотношение между $\hat{P}_x$ и $\hat{P}_y$ соответствует перестановочному соотношению между обобщенной координатой и обобщенным импульсом: $[\hat{P}_y, \hat{Q}_y] = 1$. Роль оператора обобщенной координаты $\hat{Q}_y$ играет оператор $\frac{c}{eH} \hat{P}_x$. Поэтому можно написать условие квази-классического квантования:

$$\oint P_y dQ_y = \frac{c}{eH} \oint P_y dP_x = (n + \gamma) h; \quad 0 < \gamma < 1. \quad (3)$$

Интеграл $\oint P_y dP_x$ определяет площадь, ограниченную замкнутой плоской кривой

$$\mathcal{C}(P_x, P_y, P_z) = E = \text{const}; \quad P_z = p_z = \text{const}, \quad (4)$$

и это позволяет записать (3) в более симметричном виде:

$$S(E, p_z) \equiv \int dP_x dP_y = (n + \gamma) h \frac{|e| H}{c}, \quad (5)$$

где интеграл берется по области, ограниченной кривой (4).

Условие (5) определяет в квази-классическом приближении неявную зависимость уровня энергии E от квантового числа n :

$$E = E_n(p_z; H). \quad (6)$$

Следует заметить, что компоненты p_i в (1) для электронов в металле являются компонентами квази-импульса. Это, однако, не влияет на полученные результаты, если поверхность (1) не имеет самопересечений и каждая из кривых (4) расположена внутри одной ячейки обратной решетки.

2. Зная значения энергетических уровней (6), мы можем определить как период, так и амплитуду осцилляций магнитного момента.

Магнитный момент электронного газа дается формулой (2)

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial}{\partial H} \Theta V \frac{2}{h^3} \sum_n \frac{|e| h H}{c} \int dp_z \ln \left\{ 1 + e^{\frac{E_n - \zeta}{\Theta}} \right\} = \\ &= -V \frac{2}{h^3} \sum_n \frac{|e| h H}{c} \int dp_z \frac{\partial E_n(p_z; H)}{\partial H} \left(1 + e^{\frac{E_n - \zeta}{\Theta}} \right)^{-1} + \\ &+ \Theta V \frac{2}{h^3} \sum_n \frac{|e| h}{c} \int dp_z \ln \left\{ 1 + e^{\frac{E_n - \zeta}{\Theta}} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

ζ — химический потенциал; $\Theta = kT$; V — объем).

Легко убедиться, что вклад второго слагаемого в (7) в осциллирующую часть магнитного момента является малой добавкой; поэтому при дальнейших вычислениях это слагаемое можно опустить.

Пользуясь формулой Пуассона (4) и обозначая выражение, стоящее под знаком суммы в (7), через $\varphi(E_n)$, запишем магнитный момент в виде

$$\begin{aligned} M &= -V \frac{2}{h^3} \left\{ \frac{1}{2} \varphi(E_0) + \int_0^\infty \varphi(E_n) dn + 2 \text{Re} \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \varphi(E_n) \exp(2\pi k i n) dn \right\}; \\ \varphi(E_n) &= \frac{|e| h H}{c} \int dp_z \cdot \frac{\partial E_n}{\partial H} \left[1 + \exp \frac{E_n - \zeta}{\Theta} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Осциллирующая часть магнитного момента, которая нас интересует, определяется последним слагаемым в фигурных скобках формулы (8). Учитывая вытекающее из (5) равенство $\frac{\partial E}{\partial H} = S/H \frac{\partial S}{\partial E}$ и переходя к интегрированию по S , мы преобразуем интегралы, входящие в это слагаемое, к виду

$$I_k = \int_0^\infty \varphi(E_n) e^{2\pi k i n} dn = \frac{1}{H} e^{-2\pi k i \gamma} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{S}{\partial S / \partial E} f\left(\frac{E - \zeta}{\Theta}\right) \exp\left(i \frac{k c S}{|e| \hbar H}\right) dS dp_z;$$

через $f(\varepsilon)$ мы обозначали функцию распределения Ферми: $f(\varepsilon) = (e^\varepsilon + 1)^{-1}$.

Переходя теперь от интегрирования по S к интегрированию по E , получаем

$$I_k = \frac{1}{H} e^{-2\pi k i \gamma} \int_0^{\infty} dE f\left(\frac{E-\zeta}{\Theta}\right) \left\{ \int_{S(E, p_z) > 0} dp_z S(E, p_z) \exp\left(i \frac{kcS}{|e|\hbar H}\right) \right\}. \quad (9)$$

Поскольку $cS/|e|\hbar H = n + \gamma$ по предположению очень большое число, мы можем воспользоваться для вычисления интеграла в фигурных скобках в (9) методом перевала. Это дает следующее выражение для I_k :

$$I_k \approx \frac{V \sqrt{2\pi e} e^{-2\pi k i \gamma + i\pi/4}}{(Hkc/|e|\hbar)^{1/2}} \int_0^{\infty} S_m(E) \left| \frac{\partial^2 S}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1/2} f\left(\frac{E-\zeta}{\Theta}\right) e^{i \frac{kcS_m(E)}{|e|\hbar H}} dE. \quad (10)$$

Через $S_m(E)$ мы обозначили экстремальное значение $S(E, p_z)$ при постоянном E . Если $S_m(E)$ является максимальной площадью сечения, то фаза $i \frac{\pi}{4}$ входит в (10) со знаком минус, если же $S_m(E)$ — минимальная площадь, то фаза $i \frac{\pi}{4}$ входит со знаком плюс. Производная $(\partial^2 S / \partial p_z^2)_m$ берется в экстремальной точке. Если у замкнутой поверхности $\mathcal{G}(p_x, p_y, p_z) = E$ существует несколько экстремальных сечений, то каждое из них дает свой вклад в выражение I_k .

В предположении $\partial S_m(E) / \partial E \neq 0$ и очевидном неравенстве $\Theta \ll \zeta$ основной вклад в осциллирующую часть I_k дает интегрирование по окрестности точки резкой нестационарности функции $f\left(\frac{E-\zeta}{\Theta}\right)$, т. е. по окрестности точки $E = \zeta$. Поэтому, раскладывая $S_m(E)$ в показателе экспоненты по степеням $(E - \zeta)$ и произведя интегрирование, мы получим

$$I_k \approx \frac{(-1)(2\pi H)^{1/2} S_m(\zeta) \Psi(k\lambda) e^{-2\pi k i \gamma + i(1 \mp 1/2)\pi/2}}{(kc/|e|\hbar)^{3/2} \left| \partial^2 S(\zeta, p_z) / \partial p_z^2 \right|_m^{1/2} (\partial S_m / \partial E)_\zeta} e^{i \frac{kcS_m(\zeta)}{|e|\hbar H}}, \quad (11)$$

где $\Psi(z) = z / \text{sh } z$, $\lambda = \frac{\pi c \Theta}{|e|\hbar H} \left(\frac{\partial S_m}{\partial E} \right)_\zeta$.

Как видно из (8), осциллирующая часть магнитного момента дается формулой:

$$M_{\text{осц}} = -V \frac{4}{h^3} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \{I_k\}. \quad (12)$$

Эта формула показывает, что амплитуда и период осцилляций магнитного момента полностью определяются экстремальной площадью сечения граничной поверхности Ферми плоскостью $\mathbf{P}\mathbf{H} = \text{const}$ и ее производными.

Для квадратичного закона дисперсии $\mathcal{G} = p^2 / 2m$ имеем $S_m(E) = 2\pi m E$, $\partial S_m / \partial E = 2\pi m$, $|\partial^2 S / \partial p_z^2| = 2\pi$, $\gamma = 1/2$. При этом формулы (11) и (12) переходят в известные выражения ⁽²⁾.

Для малых полей $\lambda \gg 1$, и в сумме (12) можно ограничиться одним членом, что дает:

$$M_{\text{осц}} \approx V \frac{V \sqrt{2\pi \Theta} S_m(\zeta)}{\pi^2 \hbar^3 (cH/|e|\hbar)^{1/2}} \left| \frac{\partial^2 S(\zeta, p_z)}{\partial p_z^2} \right|_m^{-1/2} e^{-\lambda} \cos \left[\frac{cS_m(\zeta)}{|e|\hbar H} + \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4} \right) - 2\pi k \gamma \right]. \quad (13)$$

Как видно из формул (11) и (13), период осцилляций дается выражением

$$\Delta H = |e| \hbar H^2 / c S_m(\zeta),$$

т. е. всегда пропорционален H^2 и зависит лишь от закона дисперсии.

3. Когда имеется несколько незаполненных энергетических зон, в которых классическое движение электронов независимо, т. е. когда поверхность Ферми распадается на несколько замкнутых поверхностей, то каждая группа электронов имеет свое $S_m(E)$ и дает свое осциллирующее слагаемое в магнитный момент.

Если при этом граничная энергия ζ оказывается у нижнего или у верхнего края незаполненной зоны, то можно ограничиться разложением

$$\mathcal{G}(P_x, P_y, P_z) = \varepsilon_0 \pm (P_x^2/2m_1 + P_y^2/2m_2 + P_z^2/2m_3).$$

Максимальная площадь сечения эллипсоида $\mathcal{G}(P_x, P_y, P_z) = E$ плоскостью $\mathbf{P}\mathbf{H} = \text{const}$ будет $S_m = 2\pi m |E - \zeta|$; $m = (m_1 m_2 m_3)^{1/3} / (m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2)^{1/2}$, где α_i — направляющие косинусы вектора магнитного поля $\mathbf{H}$ в системе кристаллографических осей. Это дает для соответствующего слагаемого $\partial S_m / \partial E = \pm 2\pi m$ и период $\Delta H = \mu H^2 / |\zeta - \varepsilon_0|$ ($\mu = |e| \hbar / mc$).

При наличии сильной анизотропии масс даже слабая мозаичность приводит к размытию или полному сглаживанию осцилляций в случае, когда в соответствующей зоне имеется большое число электронов. Поэтому в эффекте участвуют только те группы электронов или дырок, в которых число частиц крайне мало. Осцилляции с меньшими периодами могут появиться лишь при достаточно больших полях. Так как, однако, кривизна поверхности, отвечающей аномально малому числу электронов, оказывается обычно весьма большой (аномально малые «массы» электронов), то даже в этом случае предполагать наличие квадратичного закона дисперсии нет оснований.

Измеряя угловую зависимость периода и амплитуды от направления магнитного поля, можно сделать ряд заключений относительно формы граничной поверхности Ферми и относительно скоростей электронов у этой поверхности.

В заключение выражаем глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау за ценные советы и дискуссии.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Поступило
23 II 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Веркин, Б. Лазарев, Н. Руденко, ЖЭТФ, **20**, 93 (1950); **20**, 995 (1950); **21**, 658 (1951); ДАН, **80**, 45 (1951); Сборн. Памяти Сергея Ивановича Вавилова, Изд. АН СССР, 1952; Б. Веркин, ДАН, **81**, 525 (1951); Б. Веркин, И. Михайлов, ЖЭТФ, **24**, 342 (1953); **25**, 471 (1953); Д. Шенберг, ЖЭТФ, **8**, 1178 (1938); T. Berlincourt, Phys. Rev., **88**, 242 (1952). ² Л. Ландау, Zs. f. Phys., **64**, 629 (1930); Добавление к статье D. Shoenberg, Proc. Roy. Soc., A **170**, 341 (1939); А. Ахизер, ДАН, **23**, 872 (1939); Ю. Румер, ЖЭТФ, **18**, 1081 (1948); Г. Зильберман, ЖЭТФ, **21**, 1209 (1951); E. Sondheimer, A. Wilson, Proc. Roy. Soc., A **210**, 173 (1951). ³ L. Onsager, Phil. Mag., **43**, 1006 (1952). ⁴ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, **1**, М., — Л., 1951.