

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. А. СЛЕЗКИН и С. Н. ШУСТОВ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВЗВЕШЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 III 1954)

Вопрос об устойчивости ламинарного течения воды в ряде случаев экспериментально исследовался при помощи наблюдений за траекториями вводимых в поток посторонних частиц, удельный вес которых мало отличался от удельного веса воды.

Движение взвешенной частицы в потоке жидкости теоретически изучалось, например, в работе Н. Е. Жуковского⁽¹⁾, но с учетом лишь одной силы сопротивления, пропорциональной первой степени относительной скорости частицы. В работе⁽²⁾ было указано на необходимость учета при движении частицы в потоке жидкости и боковой силы, пропорциональной, по теореме Н. Е. Жуковского, произведению плотности, циркуляции и относительной скорости обтекания частицы. Необходимость учета боковой силы при изучении движения частицы в потоке диктуется не только результатами многочисленных опытов, в явной форме показывающих образование боковой силы за счет циркуляционного обтекания или за счет наличия собственного вращения тел (удовлетворительное теоретическое объяснение явления наклонного падения продолговатых тел при наличии собственного вращения было дано в двух работах⁽³⁾ Н. Е. Жуковского как раз благодаря учету боковой силы), но также и тем обстоятельством, что образование самой циркуляции в потоке обусловлено влиянием вязкости жидкости. И если при изучении движения частицы в потоке жидкости вводится сила сопротивления от вязкости, то с не меньшим основанием необходимо вводить и боковую силу от циркуляции потока, появляющейся также в результате вязкости жидкости. Тем более необходимо учитывать боковую силу при изучении движения частицы в ламинарном потоке, в котором имеет место непрерывное распределение вихрей и поэтому относительное обтекание частицы будет всегда циркуляционным.

При обтекании цилиндрического тела плоско-параллельным потоком боковая сила представляется в виде

$$\rho \Gamma V l,$$

где l — длина цилиндра в направлении, перпендикулярном к плоскости течения. Обозначая площадь сечения цилиндра через S , получим боковую силу, приходящуюся на единицу объема, в виде

$$\rho V \frac{\Gamma}{S}.$$

Переходим к движению частицы в потоке. Вектор скорости относительного обтекания частицы представим в виде $\mathbf{U} - \mathbf{V}$, а площадь сечения частицы плоскостью, перпендикулярной к плоскости векторов относительной скорости и $\text{rot } \mathbf{U}$ и проходящей через $\mathbf{U} - \mathbf{V}$, обозна-

чим через ΔS . Применяя к площади ΔS теорему Стокса о потоке вихря, будем иметь приближенно

$$\Gamma = |\operatorname{rot} \mathbf{U}| \sin [(\mathbf{U} - \mathbf{V}), \widehat{\operatorname{rot} \mathbf{U}}] \Delta S.$$

Следовательно, боковую силу, приходящуюся на единицу объема частицы, можно представить в виде

$$\mathbf{P}_2 = k_2 \rho (\mathbf{U} - \mathbf{V}) \times \operatorname{rot} \mathbf{U}, \quad (1)$$

где k_2 — безразмерный коэффициент, предельное значение которого равно единице лишь для случая, когда частица является цилиндрической и поток будет плоско-параллельным.

При наличии собственного вращения частицы с угловой скоростью Ω к множителю $\operatorname{rot} \mathbf{U}$ в (1) необходимо присоединить слагаемое $\vec{\Omega}$.

Дифференциальное уравнение движения посторонней частицы с плотностью ρ_1 в потоке жидкости в векторной форме с учетом:

1) силы веса за вычетом силы Архимеда:

$$\mathbf{P} = -g(\rho_1 - \rho) \mathbf{j}; \quad (2)$$

2) силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости и отнесенной к единице объема:

$$\mathbf{P}_1 = k_1 (\mathbf{U} - \mathbf{V}), \quad (3)$$

где коэффициент k_1 для шаровой частицы с радиусом a будет равен

$$k_1 = \frac{9}{2} \frac{\mu}{a^2}; \quad (4)$$

3) боковой силы (1) представится в виде

$$\rho_1 \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2. \quad (5)$$

Для ламинарного течения с прямолинейным распределением скоростей по сечению будем иметь

$$\mathbf{U} = i \frac{Uy}{h}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{U} = -\frac{U}{h} \mathbf{k}, \quad (6)$$

и уравнения движения частицы в проекциях на оси координат представятся в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{dV_x}{dt} &= k_1 \left(U \frac{y}{h} - V_x \right) + k_2 \rho \frac{U}{h} V_y, \\ \rho_1 \frac{dV_y}{dt} &= -g(\rho_1 - \rho) - k_1 V_y + k_2 \rho \frac{U}{h} \left(\frac{Uy}{h} - V_x \right), \\ \rho_1 \frac{dV_z}{dt} &= -k_1 V_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Если частица будет взвешенной, т. е. $\rho_1 = \rho$, то одно из возможных движений этой частицы будет представляться равенствами

$$V_x = U \frac{y_0}{h}, \quad y = y_0, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0. \quad (8)$$

Для исследования устойчивости возможного движения частицы (8) введем новые переменные

$$x_1 = \frac{V_x}{U} - \frac{y_0}{h}, \quad x_2 = \frac{y}{h} - \frac{y_0}{h}, \quad x_3 = \frac{V_y}{U}, \quad \tau = \frac{U t}{h}. \quad (9)$$

Тогда уравнения (7) и уравнение $dy/dt = V_y$ представятся в виде

$$\frac{dx_1}{d\tau} = b(x_2 - x_1) + k_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = x_3, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = -bx_3 + k_2(x_2 - x_1), \quad (10)$$

где $b = kh / \rho U$.

Характеристическое уравнение системы (10) будет иметь вид

$$\lambda(\lambda^2 + 2b\lambda + b^2 + k_2^2 - k_2) = 0. \quad (11)$$

Следовательно, возможное движение частицы (8) становится неустойчивым тогда, когда один из корней уравнения (11) будет положительным, т. е. когда

$$\sqrt{k_2(1 - k_2)} > b.$$

Используя обозначения и вводя число Рейнольдса $Re = Uh/\nu$, приходим к заключению о том, что движение шаровой взвешенной частицы в потоке (6) будет заведомо неустойчивым, если число Рейнольдса будет удовлетворять неравенству

$$Re > \frac{9}{2} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{V k_2(1 - k_2)}. \quad (12)$$

Для ламинарного течения с параболическим распределением скоростей по сечению между параллельными стенками будем иметь

$$U = U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) i; \quad \text{rot } U = 2U_m \frac{y}{h^2} k, \quad (13)$$

и уравнения движения взвешенной частицы будут представляться в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{dV_x}{dt} &= k_1 \left[U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) - V_x \right] - 2k_2 \rho \frac{y}{h^2} U_m V_y, \\ \rho \frac{dV_y}{dt} &= -k_1 V_y - 2k_2 \rho \frac{y}{h^2} \left[U_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) - V_x \right] U_m. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение этой системы уравнений, отвечающее невозмущенному движению частицы, будет представляться в виде

$$V_x = U_m \left(1 - \frac{y_0^2}{h^2}\right), \quad V_y = 0, \quad y = y_0. \quad (15)$$

Следуя методу А. М. Ляпунова, составляем дифференциальные уравнения для возмущенного движения частицы, а затем определяющее уравнение, которое в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\lambda \left[- \left(\frac{k_1 h}{\rho U_m} + \lambda \right)^2 + 4 \frac{y_0^2}{h^2} k_2 (1 - k_2) \right] = 0. \quad (16)$$

Один из корней уравнения (16) будет положительным, если

$$2 \frac{|y_0|}{h} \sqrt{k_2(1 - k_2)} > \frac{k_1 h}{\rho U_m}.$$

Вводя число Рейнольдса $Re = U_m h / \nu$ и используя обозначения, приходим к заключению, что движение шаровой взвешенной частицы (15) будет неустойчивым в смысле Ляпунова тогда, когда для числа Рейнольдса будет выполняться неравенство

$$Re > \frac{9}{4} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{h}{|y_0|} \frac{1}{V k_2(1 - k_2)}. \quad (17)$$

Чтобы сделать заключения об условиях устойчивости движения взвешенной частицы, необходимо провести дополнительные исследования в отношении нулевого корня уравнения (16) с учетом нелинейных слагаемых уравнений (14), особенно для случаев $k_2 = 0$ и $k_2 = 1$. Эти исследования нами были выполнены, и оказалось, что для обеспечения устойчивости движения (15) в смысле Ляпунова неравенство (17) можно обратить, даже и для указанных случаев $k_2 = 0$ и $k_2 = 1$, т. е. движение (16) будет устойчивым тогда, когда

$$\text{Re} < \frac{9}{4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{h}{|y_0| \sqrt{k_2(1-k_2)}}. \quad (18)$$

Неравенство, обратное (12), и неравенство (18) показывают, что предельное значение числа Рейнольдса зависит: 1) от внешней формы частицы, которая должна отразиться в коэффициенте боковой силы k_2 и в значении числового коэффициента в правой части (18); 2) от квадрата отношения характерного размера частицы к характерному размеру ламинарного потока и 3) от отношения начального расстояния частицы от средней линии потока к характерному размеру этого потока.

К аналогичным результатам мы пришли при исследовании устойчивости движения взвешенной частицы в ламинарном потоке в круглой цилиндрической трубе и между двумя вращающимися бесконечно длинными цилиндрами.

Артиллерийская академия
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
1 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Е. Жуковский, О снежных заносах и заилении рек, Полн. собр. соч., 3, 1936. ² Н. А. Слезкин, ДАН, 86, № 2 (1952). ³ Н. Е. Жуковский, О падении в воздухе легких продолговатых тел, Полн. собр. соч., 5, 1937.