

М. К. ФАГЕ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 12 IV 1954)

Рассматриваем одноточечную краевую задачу (задачу Коши)

$$\begin{aligned} L(y) &\equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \\ y(0) &= y'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq X (\leq \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

(при $X = \infty$ считаем $0 \leq x < \infty$) с непрерывными $p_2(x)$, $f(x)$ и непрерывно дифференцируемой $p_1(x)$. Пусть $A(x, s)$ — функция влияния (функция Грина) задачи (1), $A_n(x, s)$ — ее итерации. В (1) была получена характеристическая функция задачи (1):

$$R = R(w; x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)! A_n(x, s)}{n!} \frac{1}{w^{3n+1}}, \quad x \geq s \geq 0, \quad (2)$$

которая является обобщением резольвенты и может служить для построения интегрального представления $A_n(x, s)$. В этой заметке выводится дифференциальное уравнение с частными производными, которому удовлетворяет R (§ 1), с его помощью находится полное аналитическое продолжение функции $R(w; x, s)$ по комплексному переменному w , и тем самым определяется множество ее особых точек — „спектр“ одноточечной краевой задачи (§ 2).

§ 1. Характеристическое уравнение задачи (1). Непосредственным подсчетом получаем, что ряд (2) удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$-\frac{3}{w} \int_s^x A(x, t) \frac{\partial^2 R(w; t, s)}{\partial w^2} dt = R(w; x, s) - \frac{3! A(x, s)}{w^4};$$

применяя к нему оператор L (по x), получаем искомое уравнение с частными производными

$$-\frac{3}{w} \frac{\partial^2 R(w; x, s)}{\partial w^2} + L\{R(w; x, s)\} = 0. \quad (3)$$

Назовем его характеристическим уравнением задачи (1)*. Оно относится к числу тех уравнений, которые указаны Трикоми ((2), стр. 24) как общий вид уравнений 2-го порядка смешанного типа.

* Для краевой задачи с дифференциальным оператором k -го порядка (см. (1), § 1) получим аналогично $(-1)^{k+1} \frac{k+1}{w} \frac{\partial^k R}{\partial w^k} + L(R) = 0$. Это уравнение можно рассматривать как обобщение характеристического (векового) уравнения для оператора L , так как при $k=0$ (формально) оно принимает вид $-\frac{1}{w} R + L(R) = 0$.

Возьмем в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат с двумя действительными осями u, x и одной мнимой iv , отождествив „горизонтальную“ плоскость (u, iv) с плоскостью комплексного переменного $w = u + iv$, а ось x направим вертикально вверх так, чтобы система координат u, iv, x была правой. Точку $M(u, iv, x)$ будем записывать в виде $M(w, x)$. Пространство с такой системой координат назовем комплексно-вещественным и обозначим буквой T . При данном $s \geq 0$, которое закрепим во всем дальнейшем, построения будут проводиться в полупространстве $T^*(x \geq s)$. Уравнение $|w| = r(x, s)$, определяющее при данном x окружность радиуса $r(x, s)$, вне которой сходится ряд (2) (см. (1), § 2), определит в T^* поверхность вращения Q с осью x в качестве оси вращения.

Неравенства для $r(x, s)$ (см. там же), принимающие вид $K_a(x-s)^{1/2} \leq r(x, s) \leq K_b(x-s)^{3/2}$, показывают, что Q лежит «внутри»* параболоида вращения $Q_b\{x-s = K_b^{-1}|w|^{3/2}\}$ степени $3/2$, касающегося плоскости $x=s$ в своей вершине, а при малом $x-s$ Q охватывает аналогичный параболоид Q_a . Таким образом, если рассматривать $R(w; x, s)$ как функцию точки (w, x) в T^* , то она определена рядом (2) вне Q , и поставленная задача об аналитическом продолжении ряда (2) состоит в продолжении его извне Q внутрь Q . Это достигается при помощи характеристик (по способу Римана).

Характеристики уравнения (3) определяются дифференциальными уравнениями $\pm \sqrt{w} dw = \sqrt{3} dx$ с общими интегралами $\pm w^{3/2} - \rho(x-s) = \text{const}$ ($\rho = 3\sqrt{3}/2$ (имеющими смысл для любых $x, -\infty < x < +\infty$), представляющими два семейства характеристик: первое ($s+$) и второе ($s-$). Если в этих уравнениях x считать параметром, то они становятся уравнениями проекций характеристик на плоскость w . Возрастание x ($dx > 0$) определяет положительное направление как на характеристиках, так и на их проекциях. Для каждой точки $w = w_0 \neq 0$ касательные векторы (т. е. dw) к проекциям характеристик разных семейств имеют взаимно-противоположные направления. Таким образом, каждая геометрическая проекция несет две противоположно-направленные проекции обоих семейств. Далее, лучи $\arg w = 2\pi m/3$ ($m = 0, 1, 2$) удовлетворяют обоим уравнениям и являются асимптотами для других проекций. Из любых точек A, B одной проекции можно провести характеристики разных семейств, поднимающиеся навстречу друг другу до пересечения в точке M_0 . Назовем точки $(w, x) \in T^*$ с $\arg w = \frac{2\pi m}{3}$ ($m = 0, 1, 2$), $|w| \leq [\rho(x-s)]^{2/3} = r_0(x-s)$ особыми, остальные — правильными (для данной краевой задачи). Тогда из каждой правильной точки M_0 можно опустить две характеристики разных семейств AM_0 и BM_0 до пересечения с плоскостью $x=s$ в точках A, B , которые, как легко видеть, лежат на одной проекции AB .

Пусть $M_0(w_0, x_0)$ — правильная точка; возьмем на характеристиках AM_0 первого семейства и BM_0 второго семейства по точке $P_1(w_1, x_1)$, соотв. $P_2(w_2, x_2)$, и проведем из них по характеристике второго, соотв. первого, семейства. Так как последние лежат также над дугой AB , то они пересекутся в некоторой точке $P(w, x)$. Написав соответствующие равенства, легко в этом убедиться и аналитически; тогда получим

$$w^{3/2} = w_0^{3/2} - \rho(x_0 - x_1) + \rho(x_0 - x_2), \quad x = x_1 + x_2 - x_0. \quad (4)$$

При условиях $x_1 \leq x_0, x_2 \leq x_0, x_1 + x_2 - x_0 \geq s$ точка $P(w, x)$, зависящая от двух вещественных параметров x_1, x_2 , пробежит в T^* некото-

* Т. е. со стороны вогнутости.

рую поверхность — характеристический треугольник ABM_0 , с вершиной M_0 , основанием AB и боковыми сторонами AM_0, BM_0 . Мы видим, что для правильной точки $M_0(w_0, x_0)$ это основание AB в плоскости $x=s$ не пересекает оси x , и поэтому лежит вне поверхности Q ; вершина же M_0 может проникнуть внутрь Q — в любую правильную точку внутри Q . Таким образом при помощи метода Римана можно продолжить R с плоскости $x=s$ в любую точку внутри Q , за исключением особых точек, которые на данной плоскости $x=x_0$ составляют три отрезка длины $r_0(x_0-s)$, симметрично расположенных вокруг оси x . Их проекцию на плоскость w ($x=0$) обозначим $\Delta_{x_0}^s$. С изменением x_0, s в пределах задания уравнения (1) ($0 \leq s \leq x_0 \leq X$) эти отрезки составят трехлопастную поверхность с проекцией Δ .

§ 2. Аналитическое продолжение характеристической функции. Закрепим $x_0 > s$, возьмем правильную точку $M_0(w_0, x_0)$ в плоскости $x=x_0$ и для характеристического треугольника ABM_0 с основанием AB в плоскости $x=s$ построим функцию Римана $S(w_0; x_0, s; w, x)$. С этой целью введем характеристические координаты $\xi = w^{1/2} - \rho(x-s)$, $\eta = -w^{1/2} - \rho(x-s)$ и «нормальные» координаты $\sigma = \xi - \xi_0$, $\tau = \eta - \eta_0$, где $\xi_0 = w_0^{1/2} - \rho(x_0-s)$, $\eta_0 = -w_0^{1/2} - \rho(x_0-s)$ суть характеристические координаты вершины M_0 . В силу (4) получим $\sigma = 2\rho(x_0 - x_2)$, $\tau = 2\rho(x_0 - x_1)$, и, следовательно, характеристический треугольник ABM_0 отобразится в треугольник $A'B'O$ ($\sigma \geq 0$, $\tau \geq 0$, $\sigma + \tau \leq 2\rho(x_0 - s) = 2\alpha$) вспомогательной плоскости σ, τ . Связь основных координат w, x с ξ, η и σ, τ такова:

$$w^{1/2} = \frac{\xi - \eta}{2} = w_0^{1/2} + \frac{\sigma - \tau}{2}, \quad x = s - \frac{\xi + \eta}{2\rho} = x_0 - \frac{\sigma + \tau}{2\rho}. \quad (5)$$

Полагая для краткости $S(w_0; x_0, s; w, x) = S(w, x) = S_1(\sigma, \tau)$, найдем для $S_1(\sigma, \tau)$ (см. (3), пункты 143—145) интегральное уравнение

$$S_1(\sigma, \tau) = f(\sigma, \tau) \left\{ 1 + \int_0^\sigma \int_0^\tau \frac{1}{f(\sigma', \tau')} K(\sigma', \tau') S_1(\sigma', \tau') d\sigma' d\tau' \right\}, \quad (6)$$

где

$$f(\sigma, \tau) = \sqrt[4]{\frac{w}{w_0}} \exp \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p_1(u) du, \quad K(\sigma, \tau) = \frac{5}{144 w^3} - \frac{1}{27} q(x), \quad (7)$$

$q = p_2 - \frac{1}{2} p_1' - \frac{1}{4} p_1^2$ есть известный инвариант дифференциального уравнения $L(y) = 0^*$, а w, x преобразуются в σ, τ по (5). Для правильной точки $M_0(w_0, x_0)$ координата w точек характеристического треугольника ABM_0 не обращается в нуль, и поэтому f и K , а вместе с ними и решение S_1 уравнения (6) будут регулярными функциями от w_0 .

Подставляя S_1 в формулу Римана ((3), стр. 427), найдем характеристическую функцию

$$\begin{aligned} R(w_0; x_0, s) &= \sqrt[3]{3} \int_A^B S(w, s) \frac{\sqrt[4]{w}}{w^4} dw = \\ &= \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} \int_0^{2\alpha} (w_0^{1/2} - \alpha + \sigma)^{-3/2} S_1(\sigma, 2\alpha - \sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha = \rho(x_0 - s) = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} (x_0 - s)$. Приходим к следующему результату:

* Отсюда следует, что достаточно рассматривать краевую задачу (1) с оператором $L(y) = y'' + q(x)y$.

Теорема. Для краевой задачи (1) характеристическая функция (2) при данных x, s ($x \geq s \geq 0$) может быть аналитически продолжена на всю плоскость w за исключением множества (звезды) Δ_x^s , состоящего из трех отрезков

$$\arg w = \frac{2\pi m}{3} \quad (m = 0, 1, 2), \quad 0 \leq |w| \leq [\rho(x-s)]^{2/3}, \quad \rho = \frac{3V\bar{3}}{2}, \quad (9)$$

расположенных симметрично вокруг нулевой точки.

С изменением x, s ($0 \leq s \leq x \leq X$) звезды Δ_x^s составят звезду Δ — спектр одноточечной задачи. Мы видим, что спектр Δ определяется геометрией характеристик уравнения (3), которая зависит от его старших членов и не зависит от коэффициентов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ дифференциального оператора L . Этот спектр таков же, как в случае простейшего оператора $L(y) = y''$ (см. (1), § 2).

Черновицкий государственный
университет

Поступило
19 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. К. Ф а г е, ДАН, 95, № 4 (1954). ² Ф. Трикоми, О линейных уравнениях смешанного типа, М.—Л., 1947. ³ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, изд. 2-е, М.—Л., 1951.