

К. СИТНИКОВ

# НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 IV 1954)

1. Вопрос о том, являются ли взятые по дискретной области коэффициентов обычные группы с компактными носителями (группы  $\Delta_c^n$ )\* произвольного множества  $A$ , лежащего в сферическом пространстве  $S^n$ , дуализируемыми, т. е. выражаются ли они через топологические инварианты дополнительного множества, был поставлен П. С. Александровым на международной топологической конференции в 1935 г. и до сих пор оставался открытым.

В настоящей заметке дается положительное решение этого вопроса, содержащееся в новой общей теореме двойственности, доказательство которой и будет сейчас намечено.

Во всем последующем я пользуюсь терминологией и обозначениями моей работы (1) (в частности,  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  всегда обозначают двойственные между собою группы, из которых  $\mathfrak{A}$  дискретна, а  $\mathfrak{B}$  бикompактна).

2. В группе  $\nabla^p(A, \mathfrak{A})$  (т. е. в  $\nabla$ -группе, основанной на бесконечных цепях бесконечных звездно-конечных покрытий множества  $A$ ) выделяется подгруппа  $N_\nabla^p A$ , состоящая из  $\nabla$ -классов, содержащих хотя бы один  $\nabla$ -цикл, имеющий нулевое скалярное произведение со всяким конечным  $p$ -мерным  $\Delta$ -циклом с коэффициентами из  $\mathfrak{B}$ .

Вторая общая теорема двойственности. Пусть  $M^n$ -замкнутое ориентируемое  $n$ -мерное гомологическое многообразие,  $p$  и  $q$  — два целых неотрицательных числа, дающих в сумме  $n - 1$ . Предполагаем, что  $M^n$  ациклично в размерностях  $q$  и  $q + 1$  по данной произвольной группе коэффициентов  $\mathfrak{G}$ ; пусть  $A$  и  $B = M^n \setminus A$  — два произвольных взаимно-дополнительных множества в  $M^n$ . Тогда группа  $\Delta_c^q B$  изоморфна фактор-группе  $\nabla^p A - N_\nabla^p A$  (область коэффициентов — группа  $\mathfrak{G}$ ).

3. Эта теорема содержится в более сильной теореме об изоморфизме двойственности. Напомним, что группа  $\Delta_c^q B$  основана на так называемых сильных  $\Delta$ -циклах и сильных гомологиях: сильный  $\Delta$ -цикл есть последовательность  $z' = \{z'_k, x_k^{r+1}\}$   $\epsilon_k$ -циклов  $z'_k$  и  $\epsilon_k$ -цепей  $x_k^{r+1}$ ,  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , лежащих на каком-нибудь компакте  $\psi \subseteq B$  и удовлетворяющих условиям  $\Delta x_k^{r+1} = z'_{k+1} - z'_k$ . Сильный  $\Delta$ -цикл  $z' = \{z'_k, x_k^{r+1}\}$  ограничивает сильно в  $B$ , если существуют  $\epsilon'_k$ -цепи  $y_k^{r+1}$  и  $x_k^{r+2}$ ,  $\epsilon'_k \rightarrow 0$ , лежащие на некотором компакте  $\psi'$ ,  $\psi' \subseteq \psi \subseteq B$ , и удовлетворяющие условиям  $\Delta y_k^{r+1} = z'_k$ ,  $\Delta x_k^{r+2} = y_{k+1}^{r+1} - y_k^{r+1} - x_k^{r+1}$ .

Слабый  $\Delta$ -цикл (или вьеторисовский цикл) определяется, как известно, просто как последовательность  $z' = \{z'_k\}$   $\epsilon_k$ -циклов, лежащих

\* Мы ниже напомним определение этих групп.

на некотором компакте  $\psi \subseteq B$ , для которых существуют  $\varepsilon_k$ -цепи  $x_k^{r+1}$  на  $\psi$ , удовлетворяющие гомологиям  $\Delta x_k^{r+1} = z_{k+1}' - z_k'$ .

Выбирая по-разному эти цепи, мы из одного слабого цикла получим целое множество сильных.  $\Delta$ -цикл (сильный или слабый, все равно) называется слабо ограничивающим в  $B$ , если на некотором компакте  $\psi$ ,  $\psi \subseteq \psi' \subseteq B$ , существуют  $\varepsilon_k'$ -цепи  $y_k^{r+1}$ ,  $\varepsilon_k' \rightarrow 0$ , ограниченные циклами  $z_k'$ . Группа  $\Delta_c' B$  есть, как известно, фактор-группа группы всех  $r$ -мерных слабых  $\Delta$ -циклов по подгруппе слабо ограничивающих. Легко видеть, что эта группа изоморфна фактор-группе  $\Delta' B - H' B$ , где  $H' B$  есть подгруппа группы  $\Delta' B$ , состоящая из тех гомологических классов, элементы которых слабо ограничивают в  $B$ .

4. Группа  $N_{\nabla}^p(A, \mathfrak{B})$  определяется иначе, чем для дискретной области коэффициентов  $\mathfrak{A}$ , а именно, как подгруппа группы  $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$ , состоящая из всех элементов, имеющих нулевое скалярное произведение с любым  $\zeta \in \mathfrak{B}^p(A, \mathfrak{A})$ .

Если в группе  $\nabla^p A$  взять все элементы, имеющие нулевое скалярное произведение со всяким  $p$ -мерным компактным\*\* проекционным циклом множества  $A$  (по двойственной области коэффициентов), то получим подгруппу  $N_{\nabla c}^p A \supseteq N_{\nabla}^p A$ . Подгруппа  $N_{\nabla c}^p$  определяется одинаково как для дискретной, так и для бикompактной области коэффициентов.

5. Группа  $\Delta^p(A, \mathfrak{B})$  содержит две группы незацепляемости:  $N_{\Delta c}^p(A, \mathfrak{B})$  и  $N_{\Delta}^p(A, \mathfrak{B})$ , состоящие из элементов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всяким компактным, соответственно, со всяким  $q$ -мерным проекционным циклом множества  $B$  по области коэффициентов  $\mathfrak{A}|\mathfrak{B}$  (см. (2), стр. 205).

Легко видеть (2), что группа  $N_{\Delta c}^p A$  состоит из гомологических классов тех циклов, которые гомологичны нулю во всякой окрестности множества  $A$ . Вследствие доказанного в (1) первого закона двойственности группа  $N_{\Delta c}^p$  может быть определена как подгруппа группы  $\Delta^p(A, \mathfrak{B})$ , состоящая из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всяким  $\zeta \in \nabla^p(A, \mathfrak{A})$ ; отсюда — инвариантность группы  $N_{\Delta c}^p$ , из других соображений доказанная ранее П. С. Александровым ((2), стр. 210).

Это определение остается в силе, если поменять местами рассматриваемые области коэффициентов, что дает группу  $N_{\Delta c}^p(A, \mathfrak{A})$ .

6. Теорема об изоморфизме двойственности. Между группами  $\nabla^p A$  и  $\Delta^q B$  существует изоморфизм\*\*\*, отображающий в случае дискретной области коэффициентов  $\mathfrak{A}$  группы

$$\nabla^p A \supseteq N_{\nabla c}^p A \supseteq N_{\nabla}^p A,$$

соответственно, на

$$\Delta^q B \supseteq N_{\Delta c}^q B \supseteq H^q B.$$

\* Проекционным циклом называется система  $z^p = \{z_{\alpha}^p\}$  конечных  $\Delta$ -циклов, взятых по одному на каждом покрытии  $\alpha$  множества  $A$  и удовлетворяющих условию: при  $\beta > \alpha$  имеем  $\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} z_{\beta}^p \sim z_{\alpha}^p$  в  $\alpha$ . При этом  $z^p \sim 0$  в  $A$ , если  $z_{\alpha}^p \sim 0$  для любого  $\alpha$ . «Проекционная» группа  $\mathfrak{B}^p A$  есть группа проекционных циклов  $z^p$ , факторизованная по циклам, гомологичным нулю.

\*\* Проекционный цикл называется компактным, если он лежит на некотором компакте  $\phi \subseteq A$  в том смысле, что всякий  $z_{\alpha}^p$  лежит на конечном подкомплексе нерва  $\alpha$ , определенном пересекающимися с  $\phi$  элементами покрытия  $\alpha$ .

\*\*\* Это тот естественный изоморфизм  $M = GDJ^{-1}$  между группами  $\nabla^p A$  и  $\Delta^q B$ , который построен в моей работе (1).

В случае бикомпактной области коэффициентов  $\mathfrak{B}$  тот же естественный изоморфизм отображает группы

$$\nabla^p A \supseteq N_{\nabla^c}^q A \supseteq N_{\nabla}^p A,$$

соответственно, на группы

$$\Delta^q B \supseteq N_{\Delta^c}^q B \supseteq N_{\Delta}^q B.$$

Доказательство. Если дана триангуляция  $\tau$  окрестности  $\lambda$  множества  $A$ , то по лемме главы 4 моей работы <sup>(1)</sup> при изоморфизме  $M$  между группами  $\nabla^p \tau$  и  $\Delta^q \psi$  (где  $\psi = M^n \setminus \lambda$ ) имеем для  $\xi \in \nabla^p \tau$ ,  $\eta \in \Delta^p \tau$  равенство  $\xi \cdot \eta = v(M\xi, \eta)$ . Поэтому при изоморфизме  $M$  между  $\nabla^p \tau$  и  $\Delta^q \psi$  подгруппа  $N_{\nabla^c}^p \tau$  переходит в подгруппу группы  $\Delta^q \psi$ , состоящую из элементов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всеми  $\eta \in \Delta^p \tau$ , т. е. в подгруппу  $H^q \psi$ , состоящую из классов циклов, слабо гомологичных нулю в  $\psi$ . Пусть теперь  $\alpha$  — каноническое покрытие (см. <sup>(1)</sup>, гл. 2) множества  $A$  и  $\lambda$  — каноническая окрестность, ретрагируемая на нерв  $\alpha$ . При естественных изоморфизмах между  $\Delta$  —  $\nabla$  — группами окрестности  $\lambda$  и нерва  $\alpha$  скалярное произведение сохраняется.

Лемма. При естественном изоморфизме между группами  $\nabla^p \alpha$  и  $\Delta^q \psi$  осуществляется изоморфизм между подгруппами  $N_{\nabla^c}^p \alpha$  и  $H_{\Delta}^q \psi$ .

Переходя к изоморфным спектрам, участвующим в спектральном законе двойственности моей работы <sup>(1)</sup> (гл. 2), выделяем в группах, являющихся элементами этих спектров, подгруппы  $N_{\nabla^c}^p \alpha$ , соответственно  $H^q \psi$ , которые, как легко видеть, также образуют два изоморфных спектра. Соответствующими предельными группами и являются как раз группы  $N_{\nabla^c}^p A$  и  $H^q B$ , которые, таким образом, изоморфны в силу основного изоморфизма  $M$  между группами  $\nabla^p A$  и  $\Delta^q B$ .

При изоморфизме  $M$  группа  $\nabla^p(A, \mathfrak{A})$  отображается на группу  $\Delta^q(B, \mathfrak{B})$ , а группа  $\Delta^p(A, \mathfrak{B})$  — на группу  $\nabla^q(B, \mathfrak{B})$ . При этом скалярное произведение  $\xi \cdot \eta$ , где  $\xi \in \nabla^p(A, \mathfrak{A})$ ,  $\eta \in \Delta^p(A, \mathfrak{B})$ , сохраняется. Отсюда и выводится, что при изоморфизме  $M$  группа  $N_{\nabla^c}^p A \subseteq \nabla^p A$  переходит в группу  $N_{\Delta^c}^q B \subseteq \Delta^q B$ .

Последний оставшийся изоморфизм  $N_{\Delta}^p A = N_{\nabla}^q B$  есть лишь иная форма закона двойственности П. С. Александрова и доказан в <sup>(1)</sup> (стр. 42).

7. Теорема, сформулированная в § 2, может быть записана в виде двойственности

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) | \bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B}),$$

где группа  $\bar{\delta}$  определяется следующим образом. На каждом покрытии  $\alpha$  множества  $B$  берем группу  $\Delta^q(\alpha, \mathfrak{B})$  (конечные цепи!) и в ней подгруппу  $N_{\Delta}^q \alpha$  элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми  $\zeta \in \nabla^q(\alpha, \mathfrak{A})$ . Бикомпактное пополнение  $\bar{\delta}^q(\alpha, \mathfrak{B})$  группы  $\Delta^q(\alpha, \mathfrak{B})$  —  $N_{\Delta}^q \alpha$  двойственно группе  $\nabla^q(\alpha, \mathfrak{A})$  —  $N_{\nabla}^q(\alpha, \mathfrak{A})$ . Бикомпактная предельная группа обратного спектра групп  $\bar{\delta}^q(\alpha, \mathfrak{B})$  и обозначается через  $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$ . Из предыдущего следует, что  $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B}) | (\nabla^q(B, \mathfrak{A})$  —  $N_{\nabla}^q(B, \mathfrak{A})$ , т. е.  $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B}) | \Delta_c^p(A, \mathfrak{A})$ .

8. Группа  $N_{\nabla}^q(B, \mathfrak{A})$  может быть определена так же, как и для бикомпактной группы коэффициентов, но при помощи группы  $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$ . Группа же  $H^q(A, \mathfrak{A})$  является группой незацепляемости элемента-

ми группы  $\bar{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$ . При естественных гомоморфизмах группы  $\Delta$  в группы  $\delta$  и  $\bar{\delta}$  ядрами являются группы  $N_{\Delta c}$ . Таким образом, группа  $\bar{\delta}$  для бикompактной области коэффициентов является аналогом проекционной группы  $\delta$  для дискретной области.

Все рассмотренные группы можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — бикompактная область коэффициентов, а справа — дискретная:

|                                                                  |                                                                  |              |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------|
|                                                                  |                                                                  | $\delta^q B$ |
|                                                                  |                                                                  | $\uparrow$   |
| $N_{\nabla}^q B \subseteq N_{\nabla c}^q B \subseteq \nabla^q B$ | $\Delta^q B \supseteq N_{\Delta c}^q B \supseteq \mathbb{H}^q B$ |              |
| $N_{\Delta}^p A \subseteq N_{\Delta c}^p A \subseteq \Delta^p A$ | $\nabla^p A \supseteq N_{\nabla c}^p A \supseteq N_{\nabla}^p A$ |              |
| $\downarrow$                                                     |                                                                  |              |
| $\bar{\delta}^p A$                                               |                                                                  |              |

Группы, стоящие на одной вертикали, изоморфны (кроме групп  $\delta$  и  $\bar{\delta}$ ) и имеются «горизонтальные» двойственности (в которых горизонтальная черта обозначает переход к бикompактному замыканию):

$$\overline{\nabla^q B} = \overline{N_{\nabla}^q B} | \delta^q B; \quad \overline{\nabla^q B} = \overline{N_{\nabla c}^q B} | (\Delta^q B - N_{\Delta c}^q B); \quad \overline{\bar{\delta}^p A} | (\nabla^p A - N_{\nabla}^p A).$$

Основной результат. *Все четырнадцать групп, входящих в эту таблицу, а значит и всевозможные их фактор-группы, дуализируемы\*.*

9. Из наших результатов получается инвариантная характеристика множеств, составляющих максимальную элементарную область двойственности в смысле П. С. Александрова (см. (1), гл. 4), т. е. совокупность всех множеств во всевозможных  $S^n$ , для которых при любых  $\mathfrak{A} | \mathfrak{B}$  имеем

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) | \Delta_c^q(B, \mathfrak{B}); \tag{1}$$

$$\Delta_c^p(A, \mathfrak{B}) | \Delta_c^q(B, \mathfrak{A}) \tag{2}$$

(группы по  $\mathfrak{B}$  всегда берутся в надлежащей топологии). Множества удовлетворяющие двойственности (1), называются квази-открытыми; их инвариантная характеристика дана в ((1), гл. 4) и заключается в том, что для этих множеств имеет место двойственность  $\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) | \nabla^q(A, \mathfrak{B})$ , осуществляемая скалярным умножением. Теперь мы можем добавить: *множество  $A$  тогда и только тогда квази-замкнуто, т. е. удовлетворяет двойственности (2), когда естественный гомоморфизм группы  $\Delta_c^p(A, \mathfrak{B})$  в  $\bar{\delta}^p(A, \mathfrak{B})$  есть изоморфизм на всю группу  $\bar{\delta}^p(A, \mathfrak{B})$ .* Квази-замкнутые и квази-открытые множества взаимно-дополнительны. Максимальная область двойственности состоит из множеств, одновременно квази-открытых и квази-замкнутых.

Поступило  
30 III 1954

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> К. Ситников, Матем. сборн., 34 (76): 1, 3 (1954). <sup>2</sup> П. Александров, там же, 21 (63): 2, 161 (1947).

\* Как показывают примеры в  $R^3$ , все эти группы попарно различны между собой.