

С. С. РЫШКОВ

О РЕЖИМАХ РАБОТЫ ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА

(Представлено академиком П. С. Александровым 12 III 1954)

В настоящей заметке доказывается, что, каково бы ни было n , на фазовой плоскости лампового генератора с контуром в цепи сетки существует (при определенных предположениях о характеристике лампы) n предельных циклов (см. рис. 1).

1°. Уравнение рассматриваемого генератора может быть приведено (1) к виду:

$$\ddot{x} + x = \mu \lambda(x) \dot{x}, \quad \lambda(x) = \alpha \chi(x) - 1, \quad (1)$$

где x — величина, пропорциональная напряжению на конденсаторе; $\chi(x)$ — производная анодной характеристики лампы:

$$\chi(x) = \frac{di_a}{dx},$$

а μ и α — константы, зависящие от параметров схемы.

Мы будем предполагать, что величина μ достаточно мала.

2°. В работе Л. С. Понтрягина (2) рассмотрено следующее уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = r(\rho, \varphi, \mu),$$

к которому легко приводится уравнение

$$\ddot{x} + x = f(x, \dot{x}, \mu). \quad (2)$$

Здесь $r(\rho, \varphi, \mu)$ и $f(x, \dot{x}, \mu)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$. Из результатов работы (2) вытекает, что для значений ρ , удовлетворяющих условиям

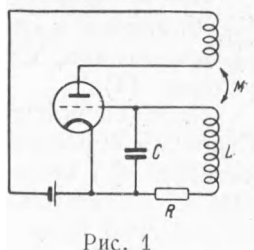
$$\int_0^{2\pi} f'_\mu(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0) \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (3)$$

$$k = \int_0^{2\pi} f_{\mu\rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0) \sin \varphi d\varphi \neq 0, \quad (4)$$

существует при всех достаточно малых μ единственный предельный цикл уравнения (2), близкий к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = \rho^2$. Этот предельный цикл устойчив при $k\mu < 0$ и неустойчив при $k\mu > 0$.

3°. Для уравнения (1) условие (3) при положительных ρ принимает вид

$$L(\rho) = 0, \quad (5)$$



где

$$L(\rho) = \rho \int_0^{2\pi} \lambda(\rho \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi. \quad (6)$$

Здесь ρ и φ — переменные, связанные с x и $\dot{x}$ соотношениями

$$\rho \cos \varphi = x, \quad \rho \sin \varphi = \dot{x}.$$

Так как подинтегральная функция в (6) не меняется при замене аргумента φ на $2\pi - \varphi$, то имеем

$$L(\rho) = 2\rho \int_0^{\pi} \lambda(\rho \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi,$$

или, переходя снова к переменному x ,

$$L(\rho) = 2 \int_{-\rho}^{\rho} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\rho}\right)^2} dx. \quad (7)$$

Условию (4) можно придать вид

$$k = \frac{dL}{d\rho} \neq 0. \quad (8)$$

Таким образом, для существования предельного цикла уравнения (1), близкого к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = \rho^2$ (при всех достаточно малых ρ), достаточно, чтобы ρ было корнем уравнения (5) и выполнялось условие (8).

4°. Идея построения примеров (5° и 6°) заключается в следующем. Строятся ступенчатые функции (см. рис. 2 и 3) $\lambda(x)$, для которых интеграл (7) принимает при возрастании ρ попеременно положительные и отрицательные значения. Таким образом, по непрерывности, интеграл $L(\rho)$ будет нужное число раз принимать нулевое значение, и условие (5) будет выполнено. Выполнения условия (8) легко достигнуть небольшим изменением функций $\lambda(x)$.

5°. Пример 1. Функцию $\lambda(x)$ определяем для $x > 0$, а для отрицательных значений x продолжим ее как функцию четную. Пусть $a_0 = 0$, $a_1, \dots, a_n$ — возрастающая последовательность чисел. Положим:

$$\lambda(x) = (-1)^{k-1} C \quad \text{при } a_{k-1} \leq x \leq a_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где C — произвольная положительная константа. Тогда (см. (7))

$$\begin{aligned} L(a_k) &= 4 \int_0^{a_k} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx = \\ &= 4 \int_0^{a_{k-1}} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx + (-1)^k 4C \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \int_0^{a_{k-1}} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \right| < Ca_{k-1}, \quad (10)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a_{k-1}}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \infty, \quad (11)$$

то числа $a_1, \dots, a_n$ можно выбрать одно за другим таким образом, чтобы было:

$$\operatorname{sign} L(a_k) = (-1)^k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Таким образом, считая, что на интервале $(0, a_n)$ функция $\lambda(x)$ задается соотношением (9), мы получим, что на каждом интервале (a_{k-1}, a_k) , $k = 1, \dots, n$, уравнение $L(\rho) = 0$ имеет по крайней мере один корень (см. (12)). Функция $\chi(x)$ на интервале $(0, a_n)$ имеет вид: $\chi(x) = \frac{1 + \lambda(x)}{\alpha}$. Для $x > a_n$ целесообразно положить $\chi(x) = 0$, чтобы характеристика лампы имела обычный вид (рис. 2).

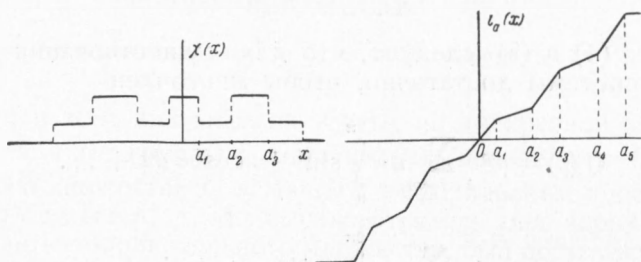


Рис. 2

6°. Пример 2. Пусть $c_0 = 0, c_1, \dots, c_{n+2} < 1$ и $a_0 = 0, a_1, \dots, a_{n+2}$ — две возрастающие последовательности чисел. Положим:

$$L(a_k) = \begin{cases} c_{2i+1} & \text{при } a_{2i} \leq x \leq a_{2i+2}, \\ 0 & \text{при } -a_1 \leq x \leq 0; \\ -c_{2i} & \text{при } -a_{2i+1} \leq x \leq -a_{2i-1}, \end{cases} \quad 0 \leq i \leq \frac{n}{2}; \quad (13)$$

Тогда при $a_{k-1} \leq x \leq a_k$ мы имеем:

$$\lambda(x) + \lambda(-x) = (-1)^k (c_{k+1} - c_k);$$

и потому:

$$\begin{aligned} L(a_k) &= 2 \int_{-a_k}^{a_k} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx = \\ &= 2 \int_{-a_{k-1}}^{a_{k-1}} \lambda(x) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx + 2(-1)^k (c_{k+1} - c_k) \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a_k}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

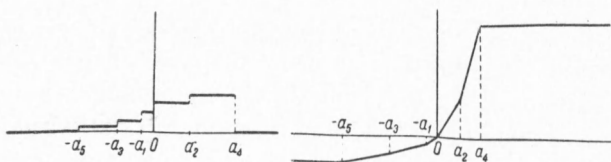


Рис. 3

В силу соотношений (10) и (11) числа $a_1, \dots, a_{n+2}$ можно выбирать одно за другим таким образом, чтобы при заданных c_i было выполнено соотношение (12) для $k = 1, \dots, n+1$. Таким образом, счи-

тая, что на интервале $(-a_n, a_n)$ функция $\lambda(x)$ задается соотношением (13), мы получим, что на каждом интервале (a_{k-1}, a_k) , $k = 1, 2, \dots, n-1$, уравнение $L(\rho) = 0$ имеет по крайней мере один корень. Функция $\chi(x)$ имеет вид:

$$\chi(x) = \frac{1 + \lambda(x)}{\alpha} \quad \text{при } |x| \leq a_n;$$

$$\chi(x) = 0 \quad \text{при } |x| > a_n$$

(см. рис. 3).

7°. Пример 3. Пусть в (3) имеем $f(x, \dot{x}, \mu) = \mu P(x, \dot{x})$, где $P(x, \dot{x}) = \sum_{i+j \leq m} a_{ij} x^i \dot{x}^j$ — многочлен степени m относительно переменных x и $\dot{x}$. Из формул (4) и (5) следует, что для существования n предельных циклов системы достаточно, чтобы многочлен

$$Q(\rho) = \rho^m \sum_{i+j=m} a_{ij} \int_0^{2\pi} \sin^{i+1} \varphi \cos^j \varphi d\varphi + \dots$$

$$\dots + \rho^k \sum_{i+j=k} a_{ij} \int_0^{2\pi} \sin^{i+1} \varphi \cos^j \varphi d\varphi + \dots$$

имел n различных положительных корней. Устойчивость определяется по знаку $Q'_c(\rho)$ в соответствующих точках. В статье (3) передоказана в более жестких предположениях часть результатов работы (2), а также строится пример, аналогичный 7°.

Эта заметка возникла как результат моих занятий в семинаре по теории колебаний. Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность руководителю этого семинара Л. С. Понтрягину.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М.—Л., 1937.
² Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 4, в. 9, 883 (1934). ³ D. Duff, N. Levinson, Quart, Appl. Math., 10, No 2 (1952).