

И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

АНАЛОГ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЕФШЕЦА

(Представлено академиком П. С. Александровым 9 IV 1954)

Хорошо известно ⁽¹⁾, что любая алгебраическая кривая бирационально эквивалентна кривой без особых точек, расположенной в трехмерном пространстве. Аналогичный вопрос для алгебраических многообразий, повидимому, не решен. Лефшец ⁽³⁾ решил этот вопрос положительно для случая так называемых абелевых многообразий, т. е. алгебраических многообразий, униформизируемых абелевыми функциями.

В настоящей заметке, возникшей в связи с работой автора в семинаре И. Р. Шафаревича, дается положительное решение этого вопроса для многообразий, униформизируемых автоморфными функциями с ограниченной областью существования*.

Пусть D — ограниченная область в n -мерном комплексном пространстве, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов D . Предположим дополнительно, что фактор-пространство D/Γ компактно. Тогда, как известно ⁽²⁾, совокупность функций, автоморфных в D относительно Γ , представляет собой поле K алгебраических функций от n неизвестных.

Функция $\varphi(z)$, регулярная в D , называется автоморфной формой веса m , если

$$\varphi(\gamma z) = j_{\gamma}^{-m}(z) \varphi(z) \quad \text{для всех } \gamma \in \Gamma, \quad (1)$$

где $j_{\gamma}(z)$ — якобиан преобразования $z \rightarrow \gamma z$.

Совокупность автоморфных форм одного веса есть линейное пространство конечной размерности ⁽²⁾.

Пусть $\varphi_0(z), \dots, \varphi_s(z)$ — максимальная система линейно независимых форм некоторого веса m . Соотношения

$$x_k = \varphi_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, s, \quad (2)$$

дают параметрическое представление некоторой алгебраической поверхности в проективном пространстве ⁽²⁾. (Мы пользуемся здесь проективным, а не аффинным пространством ввиду того, что при замене z на γz все функции $\varphi(z)$ приобретают одинаковый множитель.) Любую ⁽²⁾ автоморфную функцию можно представить в виде рациональной функции от $\varphi_0(z), \dots, \varphi_s(z)$, если $m > m_0(\Gamma, D)$.

* Отметим, что теоремы о возможности представления алгебраических многообразий, униформизируемых теми или иными классами автоморфных функций, в виде алгебраических поверхностей без особенностей представляют интерес прежде всего с точки зрения самой теории автоморфных функций. Мало вероятно, чтобы таким путем можно было доказать возможность бирационального преобразования любой алгебраической поверхности в поверхность без особенностей, поскольку проблема униформизации гораздо сложнее.

Обозначим через F множество точек z , определенное неравенством $|j_\gamma(z)| \leq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Для каждой точки $z_0 \in D$ существует эквивалентная ей точка $z_1 \in F$. Действительно, если $|j_{\gamma_0}(z_0)| \geq |j_\gamma(z)|$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то можно положить $z_1 = \gamma_0 z_0 \in F$.

Тогда

$$|j_\gamma(z_1)| = |j_\gamma(\gamma_0 z_0)| = |j_{\gamma\gamma_0}(z_0) j_{\gamma_0}^{-1}(z_0)| \leq 1 \quad (3)$$

и, следовательно, $z_1 \in F$.

Далее, F компактно. В самом деле, пусть $z_1, \dots, z_k, \dots$ — некоторая последовательность точек из F . Ввиду компактности D/Γ существует последовательность γ_k такая, что последовательность $\gamma_k z_{n_k}$ сходится к некоторой точке z_0 . Если мы покажем, что среди γ_k лишь конечное число различных, то компактность F будет доказана. Ясно, что

$$|j_{\gamma_k^{-1}}(\gamma_k z_{n_k})| = \frac{1}{|j_{\gamma_k}(z_{n_k})|} \geq 1. \quad (4)$$

Обозначим через N какую-нибудь окрестность точки z_0 . Для всех $k \geq k_0$ $\max_{z \in N} |j_{\gamma_k}^{-1}(z)| \geq 1$ и, следовательно, ввиду равномерной сходимости в N ряда $\sum |j_{\gamma_k}(z)|^2$ (2), различных γ_k может быть лишь конечное число.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\gamma z_0 \neq z_0$ для всех $\gamma \neq \varepsilon$ и $z_0 \in D$.

Покажем теперь, что если точка z_1 не эквивалентна точке z_2 , то существует автоморфная функция f , для которой $f(z_1) \neq f(z_2)$. Без ограничения общности можно принять, что z_1 и $z_2 \in F$.

Положим

$$\varphi_i(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_i(\gamma z) j_\gamma^m(z), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Пусть $\gamma_1 = \varepsilon, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ ($\gamma'_1 = \varepsilon, \gamma'_2, \dots, \gamma'_k$) все γ , для которых $|j_\gamma(z_1)| = 1$ (соответственно, $|j_{\gamma'}(z_2)| = 1$). Выберем функции $h_i(z)$, $i = 1, 2$ так, чтобы выполнялись равенства

$$h_l(z_i) = 1; \quad h_l(z_j) = 1/2 \quad \text{при } j \neq i; \\ h_1(\gamma_l z_1) = 0 \quad \text{при } 1 < l \leq p; \quad h_2(\gamma'_l z_2) = 0 \quad \text{при } 1 < l \leq k. \quad (6)$$

Тогда при достаточно большом m

$$\frac{\varphi_1(z_1)}{\varphi_2(z_1)} \neq \frac{\varphi_1(z_2)}{\varphi_2(z_2)}.$$

Таким образом мы показали, что для любых двух неэквивалентных точек z_1 и z_2 существует целое число $m(z_1, z_2)$ со следующим свойством: для любого $m > m(z_1, z_2)$ можно построить две автоморфные формы φ и ψ такие, что $\varphi(z_1)\psi(z_2) - \varphi(z_2)\psi(z_1) \neq 0$. В силу компактности F можно считать, что $m(z_1, z_2)$ ограничено некоторым числом, которое мы обозначим $m_1(\Gamma, D)$.

Пусть, далее, z_0 — некоторая точка F . Мы покажем сейчас, что для любого $m > m(z_0)$ существуют автоморфные формы $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ веса m , для которых $\Delta(z_0) \neq 0$, где

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \dots & \varphi_n \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7)$$

Будем искать эти автоморфные формы в виде

$$\varphi_i(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_i(\gamma z) j_{\gamma}^m(z). \quad (8)$$

Пусть $\gamma_1 = e, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ — все γ , для которых $|j_{\gamma}(z_0)| = 1$. Выберем столь маленькую окрестность N точки z_0 , что $|j_{\gamma}(z)| < \rho$ для всех $z \in N$ и $\gamma \neq \gamma_i$ ($i = 1, \dots, k$) (ср. (2), стр. 107). Определим, далее, h_i так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} h_0(z_0) &= 1; & h_0(\gamma_k z_0) &= 0, & 2 \leq k \leq p; \\ h_i(\gamma_k z_0) &= 0 & \text{при } 1 \leq i \leq n, & 1 \leq k \leq p; \\ \frac{\partial h_0(\gamma_k z)}{\partial z_j} \Big|_{z=z_0} &= 0, & 1 \leq k \leq p, & 1 \leq j \leq n; \\ \frac{\partial h_i(z)}{\partial z_j} \Big|_{z=z_0} &= \delta_{ij}, & 1 \leq i, j \leq n; \\ \frac{\partial h_i(\gamma_k z)}{\partial z_j} \Big|_{z=z_0} &= 0, & 1 \leq k \leq p, & 1 \leq i, j \leq n, \end{aligned} \quad (9)$$

и положим

$$\Phi_i(z) = \sum_{k=1}^p h_i(\gamma_k z) j_{\gamma_k}^m(z) = \varphi_i(z) - r_i(z, m). \quad (10)$$

Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \Big|_{z=z_0} = \delta_{ij}, \quad \Phi_0(z_0) = 1, \quad \Phi_i(z_0) = 0, \quad 0 < i \leq n, \quad (11)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом для завершения доказательства достаточно установить справедливость соотношения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_i(z_0, m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\partial r_i}{\partial z_j} \Big|_{z=z_0} = 0. \quad (12)$$

Обозначим через H максимум $h_i(z)$ при $z \in D$, $0 \leq i \leq n$. Ясно, что

$$|r_i(z, m)| = \left| \sum_{\gamma \neq \gamma_k} h_i(\gamma z) j_{\gamma}^m(z) \right| \leq H \rho^{m-2} \sum_{\gamma \in \Gamma} |j_{\gamma}(z)|^2 = O(\rho^m) \quad (13)$$

равномерно по z в N .

Из (13) при помощи интегральной формулы Коши следует (12).

Очевидно, что определитель $\Delta(z) \neq 0$ для всех z , принадлежащих достаточно малой окрестности $N(z_0)$. Окрестности $N(z_0)$ образуют покрытие F . Ввиду компактности F из этого покрытия можно выделить конечное покрытие; следовательно, существует $m_2(\Gamma, D)$ такое, что для любой точки $z_0 \in F$ и любого $m > m_2$ можно указать автоморфные формы $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ веса m , для которых определитель (7) будет отличен от нуля. Резюмируя все сказанное, мы получаем наш основной результат:

Для достаточно больших m поверхность (2) не имеет особых точек, т. е.:

- 1) $\sum_{k=0}^s |\varphi_k(z)| > 0$ для всех $z \in D$;
- 2) $\frac{\varphi_0(z')}{\varphi_0(z)} = \dots = \frac{\varphi_s(z')}{\varphi_s(z)}$ тогда и только тогда, когда z' эквивалентно z ;
- 3) ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(z) & \varphi_1(z) & \dots & \varphi_s(z) \\ \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_s(z)}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_0(z)}{\partial z_n} & \frac{\partial \varphi_1(z)}{\partial z_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_s(z)}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

равен $n + 1$.

Действительно, достаточно взять m большим, чем

$$\max(m_0(\Gamma, D), m_1(\Gamma, D), m_2(\Gamma, D)). \quad (14)$$

В заключение выражаю благодарность А. О. Гельфонду и А. А. Бухштабу за внимание, проявленное ими к настоящей заметке.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
3 XI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948, стр. 204.
- ² К. Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, 1954, гл. X.
- ³ S. Lefschetz, Trans. Am. Math. Soc., **22**, 367 (1921).