

А. Г. ПОСТНИКОВ

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА АБЕЛЕВОГО ТИПА ДЛЯ СТЕПЕННОГО РЯДА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 IV 1954)

Широко известно и просто доказывается предложение абелевого типа о том, что если в степенном ряде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \leq n} a_k}{n+1} = 1,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1.$$

Нижеследующее утверждение обобщает этот факт.

Теорема. Пусть в ряде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k \leq n} a_k}{n+1} = 1.$$

Тогда для любой функции $f(x)$ ограниченной вариации на $0 \leq x \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (1)$$

Доказательство основывается на лемме:

Лемма. Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (2)$$

Докажем сначала это утверждение для непрерывных функций. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется такое $\delta > 0$, что при $|t' - t''| < \delta$

$$|f(t') - f(t'')| < \varepsilon.$$

Возьмем $1-x < \delta$,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^1 f(t) dt - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) \right| = \\
& = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{x^{n+1}}^{x^n} f(t) dt - f(x^n)(x^n - x^{n+1}) \right] \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x^{n+1}}^{x^n} (f(t) - f(x^n)) dt \right| \leq \\
& \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x^{n+1}}^{x^n} |f(t) - f(x^n)| dt < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \varepsilon. \quad (3)
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 1-0} \left| \int_0^1 f(t) dt - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) \right| < \varepsilon.$$

Беря ε сколь угодно малым, получаем требуемое. Если $f(t)$ — интегрируемая по Риману ограниченная функция, то для заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать две непрерывные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ такие, что

$$f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t)$$

и что

$$\int_0^1 (f_2(t) - f_1(t)) dt < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) & \leq \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_2(x^n) = \\
& = \int_0^1 f_2(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) & \geq \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_1(x^n) = \\
& = \int_0^1 f_1(t) dt \geq \int_0^1 f(t) dt - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Но ε сколь угодно мало. Лемма доказана. Смысл доказательства состоит в том, что $(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n)$ представляет интегральную сум-

му для $\int_0^1 f(t) dt$.

Доказательство теоремы. Так как обе части равенства (1) линейны и так как функция ограниченного изменения представляется как разность двух неубывающих, которые можно сделать положительными, то достаточно доказать теорему в случае, когда $f(x)$ — неотрицательная неубывающая функция. Тогда $xf(x)$ тоже неотрицательная неубывающая функция. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем N такое, что при $n > N$

$$|s_n - (n+1)| < \varepsilon(n+1),$$

$$\begin{aligned}
& \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) \right| = \\
& = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - (n+1)) (x^n f(x^n) - x^{n+1} f(x^{n+1})) \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1-x) \left| \sum_{n=0}^N (s_n - (n+1)) (x^n f(x^n) - x^{n+1} f(x^{n+1})) \right| + \\ &\quad + (1-x) \sum_{N+1}^{\infty} \varepsilon(n+1) |x^n f(x^n) - x^{n+1} f(x^{n+1})| \leq \\ &\leq (1-x) \left| \sum_{n=0}^N (s_n - (n+1)) (x^n f(x^n) - x^{n+1} f(x^{n+1})) \right| + \\ &\quad + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n+1) (x^n f(x^n) - x^{n+1} f(x^{n+1})). \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow 1-0} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) - (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) \right| &\leq \\ &\leq \lim_{x \rightarrow 1-0} \varepsilon (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) \leq \varepsilon M, \end{aligned} \quad (4)$$

где $M = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.

Применим лемму к $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n)$ и взяв $\varepsilon \rightarrow 0$, доказываем теорему.

Замечание 1. В теореме можно считать остаточные члены. Например, нетрудно доказать, что если $\sum_{h \leq n} a_h = n + O(n^\delta)$, $0 \leq \delta < 1$, то для кусочно-дифференцируемой с ограниченной производной функции $f(x)$ справедливо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{(1-x)^\delta}\right). \quad (5)$$

Замечание 2. Утверждения без труда переносятся на общий случай преобразования Лапласа — Стильеса.

Замечание 3. Из теоремы можно вывести элементарным путем факт, получаемый побочно при доказательстве тауберовой теоремы

Харди и Литтльвуда ⁽¹⁾. Именно, пусть $a_n \geq 0$ и $\sum_{h \leq n} \frac{a_h}{n+1} \rightarrow 1$; тогда для любой ограниченной интегрируемой по Риману функции $f(t)$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt. \quad (6)$$

Действительно, зададим $\varepsilon > 0$ и найдем две кусочно-постоянные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (из конечного числа кусков) такие, что

$$f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t)$$

и что

$$\int_0^1 (f_2(t) - f_1(t)) dt < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) &\leq \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f_2(x^n) = \\ &= \int_0^1 f_2(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) &\geq \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f_1(x^n) = \\ &= \int_0^1 f_1(t) dt \geq \int_0^1 f(t) dt - \varepsilon. \end{aligned}$$

Но ε сколь угодно мало. Утверждение доказано.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Karamata, Math. Zs., **32**, 319 (1930).