

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

О ТЕОРЕМЕ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 IV 1954)

Из результатов работ С. Л. Соболева и В. И. Кондрашова известно, что если функция n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит $W_p^{(l)}$ в некоторой области D , т. е. имеет обобщенные производные до порядка l включительно, суммируемые со степенью $p > 1$, и если $lp < n$ (n — размерность пространства), то f суммируема со степенью q^* по плоским сечениям области D размерности m , где $m > n - lp$, $q^* < q = \frac{mp}{n - lp}$. Цель нашей заметки — доказать следующую теорему:

Теорема. Если $f \in W_p^{(l)}(D)$, $lp < n$, то f суммируема со степенью q по гиперплоскости размерности $m > n - lp$, где $q = \frac{mp}{n - lp}$ (D может быть и неограниченной).

Для $m = n$ эта теорема доказана С. Л. Соболевым ⁽¹⁾.

Следуя схеме, предложенной С. Л. Соболевым в ⁽¹⁾, нам достаточно доказать следующее интегральное неравенство.

Лемма. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ суммируема по всему пространству n переменных со степенью $p > 1$, а $g(y_1, \dots, y_m)$ суммируема по пространству m переменных со степенью $q > 1$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, $m \leq n$.

Тогда справедливо неравенство

$$I = \int \dots \int \frac{f(x_1, \dots, x_n) g(y_1, \dots, y_m)}{r^\lambda} dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m \leq \\ \leq K \left[\int \dots \int |f|^p dx_1 \dots dx_n \right]^{1/p} \left[\int \dots \int |g|^q dy_1 \dots dy_m \right]^{1/q}, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=m+1}^n x_i^2}$, $\lambda = \frac{n}{p'} + \frac{m}{q'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, а постоянная K зависит от n, m, p, q , но не зависит от f и g .

Доказательство. Для доказательства воспользуемся двумя леммами, доказанными С. Л. Соболевым ⁽¹⁾.

Лемма 1. Пусть $\varphi_1(x_1, \dots, x_m)$, $\varphi_2(y_1, \dots, y_m)$, $\varphi_3(x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m)$ — положительные суммируемые функции своих аргументов. Пусть

$\varphi_1^*(x_1, \dots, x_n)$ — функция только от $r = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$, не возрастающая и притом такая, что $\text{mes}(l_1 \leq \varphi_1^*) = \text{mes}(l_1 \leq \varphi_1)$ для всех значений l_1 .

Аналогично построим φ_2^* и φ_3^* . Тогда

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{\overbrace{2m}}^{2m} \varphi_1(x_1, \dots, x_m) \varphi_2(y_1, \dots, y_m) \varphi_3(x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m) dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_m \leq \\ & \leq \int \cdots \int_{\overbrace{2m}}^{2m} \varphi_1^*(x_1, \dots, x_m) \varphi_2^*(y_1, \dots, y_m) \varphi_3^*(x_1 - y_1, \dots, x_m - y_m) dx_1 \dots dx_m dy_1 \dots dy_m. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $\varphi_1(r_1)$ и $\varphi_2(r_2)$ — произвольные положительные и невозрастающие функции от величин

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + \sum_{i=2}^m x_i^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + a)^2 + \sum_{i=2}^m x_i^2}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int \cdots \int_{\substack{r_1 \leq 2a \\ r_2 \leq 2a}}^m \varphi_1(r_1) \varphi_2(r_2) dx_1 \dots dx_m \leq \frac{l}{a^m} \int_0^{2a} \varphi_1(r_1) r_1^{m-1} dr_1 \cdot \int_0^{2a} \varphi_2(r_2) r_2^{m-1} dr_2.$$

При доказательстве нашего неравенства мы можем считать, что φ_1 и φ_2 неотрицательны и, кроме того, на основании леммы 1 можем

предположить, что f есть невозрастающая функция от $r_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$ при всех $x_{m+1}, \dots, x_n$; g — невозрастающая функция от $r_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2}$.

Положим еще $\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2} = r_3$, $\sqrt{\sum_{i=m+1}^n x_i^2} = u$.

Интеграл I разобьем на три слагаемых $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int \cdots \int_{\substack{n-m \\ r_2 \leq r_1 \\ r_3 \leq r_1}}^{\overbrace{2m}} \left[\int \cdots \int \frac{f(r_1, x_{m+1}, \dots, x_n) g(r_2)}{r^\lambda} dy_1 \dots dy_m dx_1 \dots dx_m \right] dx_{m+1} \dots dx_n,$$

$$I_2 = \int \cdots \int_{\substack{n-m \\ r_1 \leq r_2 \\ r_3 \leq r_2}}^{\overbrace{2m}} \left[\int \cdots \int \frac{f g}{r^\lambda} dy_1 \dots dx_m \right] dx_{m+1} \dots dx_n,$$

$$I_3 = \int \cdots \int_{\substack{n-m \\ r_1 \leq r_3 \\ r_2 \leq r_3}}^{\overbrace{2m}} \left[\int \cdots \int \frac{f g}{r^\lambda} dy_1 \dots dx_m \right] dx_{m+1} \dots dx_n.$$

Оценим

$$\begin{aligned} I_2 = & \int \cdots \int_{\substack{n-m \\ r_1 \leq r_2 \\ r_3 \leq r_2}}^{\overbrace{2m}} \left[\int \cdots \int g(r_2) \left(\int \cdots \int \frac{f(r_1, x_{m+1}, \dots, x_n)}{r^\lambda} dx_1 \dots dx_m \right) dy_1 \dots dy_m \right] \times \\ & \times dx_{m+1} \dots dx_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя для оценки внутреннего интеграла лемму 2, затем переходя в интеграле, стоящем в квадратных скобках, к полярным коор-

динатам и переставляя порядок интегрирования, получим

$$I_2 \leq c_1 \int_0^\infty g(r_2) r_2^{\frac{m-1}{p'}} \left[\int \dots \int F(r_2, x_{m+1}, \dots, x_n) \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{(V r_3^2 + u^2)^2} \right) \times \right. \\ \left. \times dx_{m+1} \dots dx_n \right] dr_2, \quad (3)$$

где

$$F(r_2, x_{m+1}, \dots, x_n) = r_2^{-\frac{m}{p'}} - \frac{1}{p'} \int_0^{r_2} f(r_1, x_{m+1}, \dots, x_n) r_1^{m-1} dr_1. \quad (4)$$

На основании неравенства Харди ⁽²⁾

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p} \left[\int_0^x \chi(y) y^{\alpha-1} dy \right]^p dx \leq \left(\frac{p}{\alpha p - 1} \right)^p \int_0^\infty [\chi(y)]^p dy,$$

справедливого при $\alpha p > 1$, $p > 1$, нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty \left[\int \dots \int F^p(r_2, x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n \right] dr_2 \leq c_2 \|f\|_{L_p}^p. \quad (5)$$

Интеграл, стоящий в квадратных скобках в неравенстве (3), разобьем на два интеграла:

$$J_2(r_2) = \int \dots \int F(r_2, x_{m+1}, \dots, x_n) \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{(V r_3^2 + u^2)^\lambda} \right) dx_{m+1} \dots dx_n = \\ = \int \dots \int_{C_{r_2}^{(n-m)}} F \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{(V r_3^2 + u^2)^\lambda} \right) dx_{m+1} \dots dx_n + \\ + \int \dots \int_{R^{(n-m)} - C_{r_2}^{(n-m)}} F \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{(V r_3^2 + u^2)^\lambda} \right) dx_{m+1} \dots dx_n, \quad (6)$$

где $C_{r_2}^{(n-m)}$ — сфера в $(n-m)$ -мерном пространстве $(x_{m+1} \dots x_n)$ радиуса r_2 с центром в начале, а $R^{(n-m)} - C_{r_2}^{(n-m)}$ — дополнение этой сферы до полного пространства. Возьмем произвольное $\alpha > 0$ такое, чтобы $m \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \right) + \alpha < m$ (это возможно, так как $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} < 1$); тогда очевидна следующая цепь неравенств:

$$J_2(r_2) \leq \int \dots \int_{C_{r_2}^{(n-m)}} \frac{F}{u^{\frac{n-m}{p'} - \alpha}} \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{r_3^{m \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \right) + \alpha}} \right) dx_{m+1} \dots dx_n + \\ + \int \dots \int_{R^{(n-m)} - C_{r_2}^{(n-m)}} \frac{F}{u^{\frac{n-m}{p'} + \alpha}} \left(\int_0^{r_2} \frac{r_3^{m-1} dr_3}{r_3^{m \left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \right) - \alpha}} \right) dx_{m+1} \dots dx_n \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_3 r_2^{m-m\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)-\alpha} \left[\int \dots \int F^p dx_{m+1} \dots dx_n \right]^{1/p} \left[\int_0^{r_2} \frac{u^{n-m-1}}{u^{n-m-\alpha p'}} du \right]^{1/p'} + \\
&+ c_4 r_2^{m-m\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)+\alpha} \left[\int \dots \int F^p dx_{m+1} \dots dx_n \right]^{1/p} \left[\int_{r_2}^{\infty} \frac{u^{n-m-1}}{u^{n-m+\alpha p'}} du \right]^{1/p'} \leq \\
&\leq c_5 r_2^{m-m\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}\right)} \chi(r_2),
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\chi(r_2) = \left[\int \dots \int F^p(r_2, x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n \right]^{1/p}.$$

Обозначим еще

$$g(r_2) r_2^{\frac{m-1}{q}} = \Phi(r_2). \tag{8}$$

На основании (5)

$$\int_0^{\infty} |\chi(r_2)|^p dr_2 \leq c_2 \|f\|_{L_p}^p. \tag{9}$$

Нетрудно показать также, что

$$\chi(r_2) r_2^{1/p} \leq c_6 \|f\|_{L_p}; \tag{10}$$

$$\int_0^{\infty} \Phi^q(r_2) dr_2 \leq c_7 \|g\|_{L_q}^q. \tag{11}$$

На основании (7), (8) и (10) неравенство (3) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq c_8 \int_0^{\infty} \Phi(r_2) r_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}} \chi(r_2) dr_2 = c_8 \int_1^{\infty} [\chi(r_2)]^{\frac{p}{q'}} \Phi(r_2) \left[\chi(r_2) r_2^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{q'-p}{q'}} dr_2 \leq \\
&\leq c_9 \|f\|^{\frac{q'-p}{q'}} \int_0^{\infty} [\chi(r_2)]^{\frac{p}{q'}} \Phi(r_2) dr_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Применяя для оценки этого интеграла неравенство Гельдера для показателя q и оценки (9) и (11), окончательно будем иметь

$$I_2 \leq c_{10} \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}.$$

Аналогичным образом оцениваются I_1 и I_3 .

Примечание. Как мне сообщил В. Бабиц, в рассматриваемом здесь предельном случае оператор вложения не является вполне непрерывным.

Поступило
30 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), № 3 (1938). ² Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, 1948.